5. עקמומיות של עקומת Jordan, שריגים, טורוסים

5.1 עקמומיות כללית

אם $C \subseteq \mathbb{R}^2$ עקומת ג'ורדן אז קיימת פונקציה רציפה $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ כך ש= $\alpha(a)$
$\alpha(b) = P$, ו$C = \mathrm{Im}(\alpha)$

משפט

עקמומיות כוללת של עקומת Jordan כמורה עם פרמטריזציה $\alpha(s)$(אורך הקשת) היא

$$\int_a^b k_\alpha(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi$$

הוכחה

נניח $[a,b] = [0,L]$ כאשר L הוא אורך של העקומה. נניח $\alpha(0)$ היא הנקודה "הנמוכה" ביותר על העקומה. בנוסף ניתן להניח שהפרמטריזציה היא נגד כיוון השעון.

לכן ווקטור משיק $\alpha'(s) = v(s)$ הוא $\begin{matrix} v(0) = (1,0) \\ v(0) = e^{i0} \end{matrix}$

$$\boxed{v(s) = e^{i\theta(s)}}$$

הוכחה

$$\int_a^b k_\alpha(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \|\alpha''(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_0^L \|v'(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_0^L \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{i\theta(s)}\right)\right\|\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^L \left|ie^{i\theta(s)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s = \int_0^L \left|e^{i\theta(s)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^L |v(s)|\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \int_0^L \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi$$

5.2 מרכיבי קשירות של עקומה

הגדרה

נקודות p,q על עקומה C נמצאת באותה מחלקת קשירות אם קיימת העתקה $h:[0,1]\to C$ רציפה כאשר $\begin{array}{c} h(0)=p \\ h(1)=q \end{array}$.

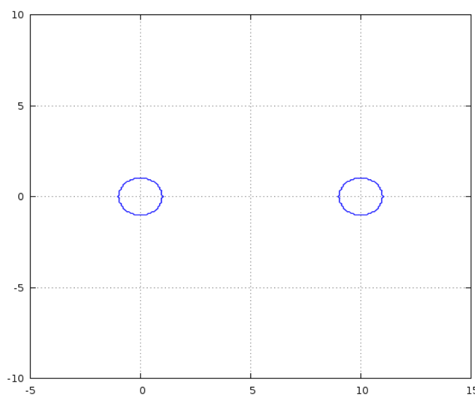
הגדרה

אוסף של מחלקות קשירות של עקומה C מסומן $\pi_0(C)$.
מספר מחלקות קשירות הוא $|\pi_0(C)|$.

דוגמה

$$F(x,y)=\left(x^2+y^2-1\right)\left((x-10)^2+y^2-1\right)$$

נגדיר עקומה $C=\{F(x,y)=0\}$



$$\boxed{\pi_0(C)=2}$$

משפט

אם כל מחלקת קשירות של C היא עקומת Jordan קמורה אזי עקמומיות כוללת של C היא

$$\boxed{\oint_C k_C \,\mathrm{d}s = 2\pi \left|\pi_0\left(C\right)\right|}$$

הוכחה

נסמן ב$C_1, C_2, \ldots C_k$ מרכיבי קשירות של C.

$$\oint_C k_C \,\mathrm{d}s = \oint_{C_1} k_C \,\mathrm{d}s + \oint_{C_2} k_C \,\mathrm{d}s = 2\pi k$$

5.3 מעגל דרך העתקה אקספוננציאלית

$\mathbb{R} \supseteq L_\alpha$ (lattice) שריג נפרש ע"י $\alpha > 0$:

$$L_\alpha = \mathbb{Z}\alpha \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\left(\alpha\right) = \left\{\ldots, -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha, \ldots\right\} = \left\{0, \pm\alpha, \pm2\alpha, \ldots\right\}$$

שאריג $\mathbb{R} \supseteq L_\alpha$ הוא תת חבורה, לכן קיימת <u>חבורת מנה</u> $\mathbb{R}/\mathrm{L}_\alpha$. <u>תחום יסודי</u> שלה הוא $[0, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

$$\mathrm{length}\left(\mathbb{R}/\mathrm{L}_\alpha\right) = \mathrm{length}\left([0, \alpha]\right) = \alpha$$

משפט

חבורת מנה $\mathbb{R}/\mathrm{L}_\alpha$ איזומורפית למעגל $S^1 \subseteq \mathbb{C}$

הוכחה

נתבונן בהעתקה

$$\hat{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$\hat{\phi}\left(x\right) = e^{\frac{i2\pi x}{\alpha}}$$

אזי $\hat{\phi}$היא הומומורפיזם מ$\left(\mathbb{R}, +\right)$ ל$\left(\mathbb{C}\setminus\left\{0\right\}, \cdot\right)$

...

5.4 שריגים, תחום יסודי

יהי מספר שלם $b > 0$.

הגדרה

שריג L במרחב $\mathbb{R}^b$ הוא $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}$ של b ווקטורים בת"ל.

אם יש ווקטורים $v_1,\dots v_b$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$, ניתן לכתוב

$$L=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\left(v_1,\dots v_b\right)=\mathbb{Z}v_1+\mathbb{Z}_2+\cdots+\mathbb{Z}v_b$$

הערה: L הוא איזומורפי ל-$\mathbb{Z}^b$

הגדרה

<u>מסלול</u> של נקודה $x_0\in\mathbb{R}^b$ תחת פעולה של L הוא $\{x_0+g|g\in L\}$

הגדרה

מבנה $\mathbb{R}^b/L$ נקרא טורוס b-מימדי (b-torus)

הגדרה

תחום יסודי של טורוס $\mathbb{R}^b/L$ הוא תת־קבוצה סגורה $F\subseteq\mathbb{R}^b$ המקיימת 3 תנאים:

1. כל מסלול נפגש עם F בנקודה אחת לכל הפחות
2. כל מסלול נפגש עם $\mathrm{Int}\left(F\right)$

   הגדרה: אם $F\subseteq\mathbb{R}^b$ אזי $\mathrm{Int}\left(F\right)=\{x\in F|x\in U$ כאשר $U\subseteq F$ קיימת סביבה פתוחה (Interior)

3. שפה של F היא איחוד של תת־פנים במימד $b-1$ לכל היותר.

דוגמה של תחום יסודי

מקבילון נפרש ע"י $v_1,\dots v_b$

דוגמה

$e_1,e_2\in\mathbb{R}^2$.

$$L_G=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\left(e_1,e_2\right)$$

$$L_G=\{ne_1+me_2|n,m\in\mathbb{Z}\}$$

$L_G=\{n+im\in\mathbb{Z}|n,m\in\mathbb{Z}\}$ - שלמים של גאוס

דוגמה(שריג של Eisenstein)

$$L_E = \left\{ n + me^{i\pi/3} \middle| n, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

5.6 מינימום עוקבים של שריג

$L \subseteq \mathbb{R}^2$

הגדרה

מינימום עוקב ראשון $\lambda_1(L)$ הוא

$$\lambda_1(L) = \min\left\{ \|v\| | v \in L \setminus \{0\} \right\}$$

משפט

אם $L \subseteq R$ אזי מעגל $\mathbb{R}/L$ הוא באורך $\text{length}\left(\mathbb{R}/L\right) = \lambda_1(L)$

$$L = L_\alpha$$

$$\lambda_1(L_\alpha) = |\alpha|$$

הוכחה

$$L = \{0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \dots\}$$

$$\lambda_1(L) = |\alpha|$$

קטע $[0, \alpha]$ הוא תחום יסודי של L_α, לכן $\text{length}\left(\mathbb{R}/L\right) = \alpha$.

הגדרה

מינימום העוקב השני $\lambda_2(L)$:

לכל זוג $S = \{v, w\}$ של ווקטורים $v, w \in L$ נסמן

$$|S| = \max\left(\|v\|, \|w\|\right)$$

הגדרה

$\lambda_2(L)$ הוא
$\lambda_2 = \min\{|s|\,|s=\{v,w\}$,בת"ל $v,w\in L\}$

דוגמה

$\lambda_1(L_G)=\lambda_2(L_G)=1$ וגם $\lambda_1(L_E)=\lambda_2(L_E)=1$

דוגמה

נסמן $L_{\alpha,\beta}=\mathbb{Z}\alpha e_1+\mathbb{Z}\beta e_2\subset\mathbb{R}^2$

$$\lambda_1(L_{\alpha,\beta})=\min(|\alpha|,|\beta|)$$

$$\lambda_2(L_{\alpha,\beta})=\max(|\alpha|,|\beta|)$$

5.7 מטריצת Gram

הגדרה

$$S=\{v_i\}_{i=1,\dots n}\subseteq\mathbb{R}^b$$

$$\mathrm{Gram}(S)=(\langle v_i,v_j\rangle)_{\substack{i=1,\dots n\\ j=1,\dots n}}$$

משפט

נפח של טורוס $\mathbb{R}^b/L$ הוא שורש של דטרמיננטה של מטריצת Gram של בסיס של שריג L.

$$\mathrm{Vol}(P)=\sqrt{\det(\mathrm{Gram}(L))}$$

הוכחה

$$M_{b,b} \ni A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \dots & v_b \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Vol}\left(P\right) = \left|\det A\right|$$

נניח $B = A^t A$. נניח $B = \left(b_{ij}\right)$. אזי

$$b_{ij} = v_i^t v_j = \left\langle v_i, v_j \right\rangle$$

$$B = \mathrm{Gram}\left(S\right)$$

$$S = \left\{v_1, \dots v_b\right\}$$

$$\det\left(B\right) = \det\left(A^t A\right) = \det\left(A^t\right) \det A = \left(\det A\right)^2$$

לכן

$$\mathrm{Vol}\left(P\right) = \left|\det A\right| = \sqrt{\det B} = \sqrt{\det \mathrm{Gram}\left(S\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{R}^2/\mathrm{L}\right) = \sqrt{\det \mathrm{Gram}\left(S\right)}}$$

5.9 קבוע של Hermite

γ_b הוא

$$\gamma_b = \max\left\{\frac{\left(\lambda_1\left(L\right)\right)^2}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{R}^b/\mathrm{L}\right)^{2/b}}\right\}$$

הגדרה

שריג $L \subset \mathbb{R}^2$ הוא קריטי אם $\lambda_1(\mathrm{L})^2/\mathrm{area}\left(\mathbb{R}^2/\mathrm{L}\right) = \gamma_2$

5.10 תחום יסודי סטנדרטי

$L \subseteq \mathbb{R}^2$ $(b = 2)$

משפט

כאשר $b=2$, קבוע של Hermite הוא

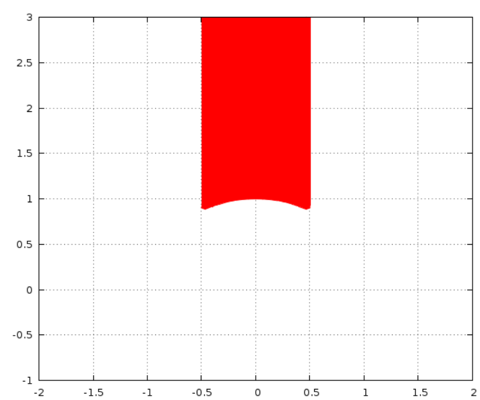
$$\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

השריג הקריטי הוא שריג Eisenstein L_E.

הגדרה

תחום יסודי סטנדרטי $D \subseteq \mathbb{C}$ הוא מוגדר ע"י

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathrm{Im}\,(z) > 0 \\ |z| \geq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq +\frac{1}{2} \end{array} \right\} 0$$



5.11 פרמטר קונבפורמי τ

הגדרה

טורוס $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathrm{L}$ שהוא טורוס 2-מימדי.
אזי פרמטר קונפורמי $\tau\left(T^2\right)$ הוא מספר $\tau\left(T^2\right) \in D$ כאשר שריג L דומה לשריג $\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\tau$