1) הוכח או הפרך את הטענות הבאות

א) תהי G חבורה, $H \trianglelefteq G$. אם G אבלית אזי H ו- G/H אבליות.

<u>הוכחה</u> יהיו $h_1,h_2\in H$. בפרט $h_1,h_2\in G$, לכן $h_1h_2=h_2h_1$ כי G אבלית.
לכן H אבלית.
יהיו $g_1H, g_2H\in G/H$ כאשר $g_1,g_2\in G$. אזי $(g_1H)(g_2H)=(g_1g_2)H=(g_2g_1)H=(g_2H)(g_1H)$

ולכן G/H אבלית.

ב) תהי G חבורה, $H \trianglelefteq G$. אם H ו-G/H אבליות, אזי G גם אבלית.

<u>הפרכה</u> יהי $G=D_n$ <u>כאשר $n\geq 3$</u> (ואחרת D_n אבלית). יהי $H=\langle\sigma\rangle$.
אזי H ציקלית, לכן אבלית. בנוסף,

$$[D_n:H]=\frac{|D_n|}{|H|}=\frac{2n}{n}=2$$

ולכן $H \trianglelefteq D_n$, כמו כל תת-חבורה מאינדקס 2. לכן, $|D_n/H|=2$.
וזה אומר כי D_n/H ציקלית, לכן אבלית, כמו כל חבורה מסדר הראשוני. אבל D_n לא אבלית, שהרי $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1} \Rightarrow$
$\tau\sigma=\sigma^{-1}\tau=\sigma^{-2}(\sigma\tau)\neq\sigma\tau$

2 א) תהי G חבורה שפועלת על קבוצה A. תהי $H\leq G$ תת-חבורה שפועלת על A באופן טרנזיטיבי. הוכח כי $G=HG_a$ לכל $a\in A$.

<u>הוכחה</u> יהי $g\in G$; נוכיח כי $g\in HG_a$. אזי, $g*a\in A$, ולפי הטרנזיטיביות קיים $h\in H$ כך ש- $h*(g*a)=a$, כלומר $hg*a=a$, כלומר $hg\in G_a$. אזי $g=h^{-1}(hg)\in HG_a$. לכן $G\subseteq HG_a$. ההכלה ההפוכה ברורה, לכן $G=HG_a$.

ב) תהי G חבורה סופית, $H \trianglelefteq G$, $P\in Syl_p(H)$. הוכח כי $G=HN_G(P)$.

<u>הוכחה</u> נגדיר פעולה של G על ידי הצמדה על הקבוצה $Syl_p(H)$ של תת-חבורות p-סילוב של H. אזי, לכל $g\in G$, הצמדה ב-g

היא אוטומורפיזם של G, לכן $gPg^{-1} \le G$ תג"ח כמו כל תמונה הומומורפית של תג"ח. בנוסף, $H \trianglelefteq G$ ולכן $gPg^{-1} \le H$. בנוסף, $|gPg^{-1}| = |P|$, לכן gPg^{-1} גם תג"ח p-סילו של H.

לפי משפט סילו II, כל $P, Q \in Syl_p(H)$ צמודות ב-H: קיים $h \in H$ כך ש-
$h * P = hPh^{-1} = Q$. לכן, H פועלת באופן טרנזיטיבי. בנוסף,

$$G_P = \{g \in G : g * P = P\} = \{g \in G : gPg^{-1} = P\} = \{g \in G : gP = Pg\} = N_G(P)$$

ולכן $G = HN_G(P)$ לפי הסע' הקודם.

3א) יהי $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$. מצא את המרכז $C_{S_5}(\sigma)$.

<u>פתרון 1</u> המחזורים הצמודים ל-σ ב-S_5 הן אלה עם אותו טיפוס מחזורי, כלומר מחזורים מאורך 5. יש $\frac{5!}{5} = 24$ כאלה. אך לפי משפט מסלול-מייצב,

$$24 = |conj(\sigma)| = \frac{|S_5|}{|C_{S_5}(\sigma)|} = \frac{120}{|C_{S_5}(\sigma)|}$$

כלומר $|C_{S_5}(\sigma)| = 5$. אבל ברור כי כל חזקה של σ מתחלפת עם σ, לכן $\langle\sigma\rangle \le C_{S_5}(\sigma)$. כיוון ש-$o(\sigma) = 5$, זה אומר $C_{S_5}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.

<u>פתרון 2</u> נשים לב כי $C_{S_5}(\sigma) = \{\tau \in S_5 : \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\}$.
למדנו בתרגול כי $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5))$,
כלומר $\tau \in C_{S_5}(\sigma)$ אם ורק אם $\sigma = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5))$.
יש חמש דרכים לכתוב את σ כמחזור מאורך 5, וזה נותן לנו חמשה איברים של $C_{S_5}(\sigma)$.

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5) \Rightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e.$$

$$\sigma = (2\,3\,4\,5\,1) \Rightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3\,4\,5) = \sigma.$$

$$\sigma = (3\,4\,5\,1\,2) \Rightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,5\,2\,4) = \sigma^2$$

$$\sigma = (4\,5\,1\,2\,3) \Rightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\,4\,2\,5\,3) = \sigma^3.$$

$$\sigma = (5\,1\,2\,3\,4) \Rightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\,5\,4\,3\,2) = \sigma^4.$$

לכן $C_{S_5}(\sigma)=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\}=\langle\sigma\rangle$.

ב) מצאו את $C_{A_5}(\sigma)$.

פתרון נשים לב כי $C_{A_5}(\sigma)=\{\tau\in A_5:\ \tau\sigma\tau^{-1}=\sigma\}=C_{S_5}(\sigma)\cap A_5$.
אך σ מחזור מאורך 5, לכן $sgn(\sigma)=(-1)^{5-1}=1$,
לכן $\sigma\in A_5$, לכן $\langle\sigma\rangle\subseteq A_5$. לכן,
$C_{A_5}(\sigma)=\langle\sigma\rangle\cap A_5=\langle\sigma\rangle$.

ג) האם קיימים איברים של A_5 שצמודים ל-σ ב-S_5 אבל לא ב-A_5? אם כן, מצאו את כולם.

פתרון לפי משפט מסלול-מייצב,

$$|conj_{S_5}(\sigma)|=\frac{|S_5|}{|C_{S_5}(\sigma)|}=\frac{120}{5}=24$$

$$|conj_{A_5}(\sigma)|=\frac{|A_5|}{|C_{A_5}(\sigma)|}=\frac{60}{5}=12.$$

כלומר, 12 איברים של A_5 צמודים של σ ב-A_5. אך 24 תמורות צמודות ל-σ ב-S_5 וכולן מחזורים מאורך 5, כלומר שייכות ל-A_5.
לכן יש ל-A_5 12 איברים שצמודים ל-σ ב-S_5 אך לא ב-A_5.
צריך למצוא אותן.
$\tau_1,\tau_2\in S_5$ כך ש
נשים לב שאם $\tau_1\sigma\tau_1^{-1}=\tau_2\sigma\tau_2^{-1}$, אזי $\tau_2^{-1}\tau_1\sigma\tau_1^{-1}\tau_2=\sigma$,
כלומר $\tau_2^{-1}\tau_1\in C_{S_5}(\sigma)\subseteq A_5$, כלומר $sgn(\tau_2^{-1}\tau_1)=1$. אך sgn הינו הומומורפיזם, לכן $sgn(\tau_1)=sgn(\tau_2)$.
לכן, אם $sgn(\tau_1)=-1$, אזי אין שום תמורה זוגית τ_2 כך ש $\tau_1\sigma\tau_1^{-1}=\tau_2\sigma\tau_2^{-1}$, כלומר $\tau_1\sigma\tau_1^{-1}$ צמודה ל-σ ב-S_5 אך לא ב-A_5.
עכשיו נצמיד את σ עם תמורות אי-זוגיות עד שנקבל 12 תמורות שונות.

הערה עבור σ אחר, בהחלט ייתכן שקיימים τ_1,τ_2 מזוגיות שונה כך ש $\tau_1\sigma\tau_1^{-1}=\tau_2\sigma\tau_2^{-1}$.

$(12)\sigma(12)^{-1} = (1\,3\,4\,5\,2)$
$(13)\sigma(13)^{-1} = (1\,4\,5\,3\,2)$
$(14)\sigma(14)^{-1} = (1\,5\,4\,2\,3)$
$(15)\sigma(15)^{-1} = (1\,5\,2\,3\,4)$
$(23)\sigma(23)^{-1} = (1\,3\,2\,4\,5)$
$(24)\sigma(24)^{-1} = (1\,4\,3\,2\,5)$
$(25)\sigma(25)^{-1} = (1\,5\,3\,4\,2)$
$(34)\sigma(34)^{-1} = (1\,2\,4\,3\,5)$
$(35)\sigma(35)^{-1} = (1\,2\,5\,4\,3)$
$(45)\sigma(45)^{-1} = (1\,2\,3\,5\,4)$
$(1243)\sigma(1243)^{-1} = (1\,3\,5\,2\,4)$
$(1342)\sigma(1342)^{-1} = (1\,4\,2\,5\,3)$

4. א) יהי G חבורה מסדר 35. הוכח כי $G\simeq\mathbb{Z}_{35}$.

<u>הוכחה</u> תהיינה P ו-Q תת"ח 5-סילוב ו-7-סילוב בהתאמה. כיוון ש-$35=5\cdot 7$, מקבלים $|P|=5$, $|Q|=7$. בנוסף, לפי סילוב III:

$n_7|5,\ n_7\equiv 1 \bmod 7 \Rightarrow n_7=1 \Rightarrow Q\trianglelefteq G$.

$n_5|7,\ n_5\equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow n_5=1 \Rightarrow P\trianglelefteq G$, כי תת"ח p-סילוב יחידה הינה נורמלית. לפי לגרנז', $|P\cap Q|\,\big|\,|P|$, $|P\cap Q|\,\big|\,|Q|$ $\Rightarrow P\cap Q=\{e\}$, כי $\gcd(5,7)=1$.

במצב הזה ניתן להגדיר את המכפלה הישרה הפנימית של P,Q. לפי משפט מן השיעור, $PQ\simeq P\times Q$. בפרט, $|PQ|=|P\times Q|=|P||Q|=35=|G|$, ולכן $G\simeq P\times Q$, כי $G=PQ\simeq P\times Q$.
אך P,Q מסדר ראשוני, לכן ציקליות. זה אומר
$G\simeq\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_7\simeq\mathbb{Z}_{35}$ (כי שוב, 5,7 זרים

ב) תהי G חבורה מסדר $105=3\cdot5\cdot7$. תהיינה H ו-K תת״ח 5-סילו ו-7-סילו בהתאמה. הוכח שלפחות אחת מהן נורמלית.

<u>הוכחה</u> לפי סילו III, $n_5\equiv 1 \mod 5$, $n_5 | 21$ $\Leftarrow$ $n_5\in\{1,21\}$.

$n_7\equiv 1 \mod 7$, $n_7 | 15$ $\Leftarrow$ $n_7\in\{1,15\}$

נניח בשלילה כי H,K שתיהן לא-נורמליות. אזי $n_5=21$ וגם $n_7=15$.

לכל אחת מ-21 התת״ח ה-5-סילו מסדר 5 יש ארבעה איברים מסדר 5. כיוון שהסדר של התת״ח ראשוני, החיתוכים ביניהן טריוויאליים (תהיינה P_1,P_2 שתי חבורות כאלה. אם $\{e\}\neq P_1\cap P_2$, אזי לפי לגרנז' $P_1=P_1\cap P_2=P_2$). לכן ב-G יש $21\cdot4=84$ איברים מסדר 5.
באופן דומה, רואים שיש $15\cdot6=90$ איברים מסדר 7. סך הכל מצאנו עד כה $84+90=174$ איברים שונים בחבורה מסדר 105, מה שלא יתכן. לכן לפחות אחת מן ~~התת״ח~~ התת-חבורות H,K נורמלית.

ג) הוכח כי $H\trianglelefteq G$ וגם $K\trianglelefteq G$.

<u>הוכחה</u> כיוון שלפחות אחת מהן נורמלית, HK היא תת-חבורה של G. מצד אחד, $|HK|\le|H|\cdot|K|=35$. מצד שני, H,K שתיהן תת-חבורות של החבורה HK, ולפי לגרנז' $|HK|$ מתחלק הן ב-5 וגם ב-7. לפי הסעיף א', $HK\cong\mathbb{Z}_{35}$. בפרט HK אבלית, לכן כל תת״ח בה נורמלית, לכן $H\trianglelefteq HK$ וגם $K\trianglelefteq HK$.

נשים לב כי $[G:HK]=\frac{105}{35}=3$ וזה הראשוני הכי קטן המחלק את $|G|$. לפי משפט מן התרגול, זה אומר כי $HK\trianglelefteq G$. אך H,K הן תת״ח סילו נורמליות של HK; לכן נורמליות ב-G לפי משפט מן השיעור.

<u>פתרון אחר</u> כמו קודם, מוכיחים כי $H \trianglelefteq HK$ וגם $K \trianglelefteq HK$. נוכיח כי $K \trianglelefteq G$.
זה אומר כי $HK \le N_G(H)$ ובפרט $[G:N_G(H)] \le 3$, כי $[G:HK]=3$.
אבל H היא 5-סילוב של G, כלומר

$$[G:N_G(H)] = n_5 \in \{1, 21\} \Rightarrow [G:N_G(H)]=1 \Rightarrow N_G(H)=G \Rightarrow H \trianglelefteq G.$$

באופן דומה, אם ידוע $H \trianglelefteq G$, אזי מקבלים $HK \le N_G(K)$ כי $K \trianglelefteq HK$. בפרט $[G:N_G(K)] \le 3$. אך $[G:N_G(K)] = n_7 \in \{1, 15\}$.

לכן $[G:N_G(K)]=1$. לכן $K \trianglelefteq G$.

5. א) כמה הומומורפיזמים $f: \mathbb{Z}_4 \to S_4$ יש?

<u>פתרון</u> כיוון ש-$\mathbb{Z}_4$ ציקלית, כל הומ׳ f כנ"ל נקבע על ידי התמונה של היוצר $[1]$. חייב להתקיים
$$f([1])^4 = f([4]) = f([0]) = e.$$

אבל אם $\sigma \in S_4$ מקיים ש-$\sigma^4 = e$, אזי $f([n]) = \sigma^n$ מגדיר הומומורפיזם $f: \mathbb{Z}_4 \to S_4$. אז צריך לספור כמה איברים של S_4 מקיימים $\sigma^4 = e$. ~~[illegible]~~ אם $\sigma^4 = e$, אזי $o(\sigma) | 4$, כלומר $o(\sigma) \in \{1, 2, 4\}$.

<u>$o(\sigma)=1$</u> אזי $\sigma = e$ $\therefore$ יש תמורה אחת כזו.

<u>$o(\sigma)=2$</u> אזי הטיפוס המחזורי של σ הינו 2 או 2,2; כי אלה החלוקות היחידות של 4 עם ה-lcm של איבריהן הינו 2.

יש $\binom{4}{2} = 6$ חילופים מטיפוס 2, ועוד
$\frac{1}{2!}\binom{4}{2} = 3$ תמורות מטיפוס 2,2 כלומר $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$.

הנוסחאות הנ"ל למדנו בתרגול. מי שלא זוכר אותן יכול למצוא את התמורות במפורש.

$o(\sigma)=4$ אלה תמורות מטיפוס 4, כלומר מחזורים מאורך 4. יש $\frac{4!}{4}=6$ כאלה.

סה"כ מצאנו $1+6+3+6=16$ הומומורפיזמים.

<u>הערה</u> אפשר גם לשים לב שהאיברים היחידים ב-S_4 <u>שלא</u> מקיימים $e=\sigma^4$ ~~...~~ הם מחזורים מאורך 3. יש 8 כאלה. לכן $24-8=16$ איברים $\sigma\in S_4$ כן מקיימים $e=\sigma^4$.

ג) יהי G חבורה סופית, $f:A_6\to G$ הומו' לא טריוויאלי. הוכח כי $360 \mid |G|$.

<u>הוכחה</u> ידוע לנו כי $\ker f \trianglelefteq A_6$, אך A_6 פשוטה. לכן $\ker f = A_6$ או $\ker f=\{e\}$. אם $\ker f = A_6$, אז f טריוויאלי בסתירה להנחה. אזי $\ker f=\{e\}$. לפי משפט האיזו' הראשון, $A_6/\ker f = Im f$, ולכן $|Im f| = |A_6/\{e\}| = |A_6| = \frac{6!}{2} = 360$.

אך $Im f$ הינה תת-חבורה של G. לפי לגרנז', $|Im f| \mid |G|$ ולכן $360 \mid |G|$.