# פתרון תרגיל בית 7 בשדות ותורת גלואה
# 88-311 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1.** תהי $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה כך ש-$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_n$. הוכיחו כי יש ל-$E$ תת־שדה $K$ כך ש-$[K:\mathbb{Q}]=2$.

פתרון. ל-$S_n$ יש תת־חבורה ידועה מאינדקס 2 והיא $A_n$. לפי התאמת גלואה $E^{A_n}$ הוא תת־שדה כך ש-$[E:E^{A_n}]=\frac{n!}{2}$ ולכן $[E^{A_n}:\mathbb{Q}]=2$, כדרוש.

**שאלה 2.** חשבו את חבורות גלואה הבאות ואת סריג תת־החבורות שלהן. מצאו גם את סריג תת־השדות של ההרחבות המתאימות.

א. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)/\mathbb{Q})$

ב. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר $E$ הוא שדה הפיצול של $x^3-7$.

ג. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר $E$ הוא שדה הפיצול של $x^7-1$.

פתרון.

א. נשים לב ש-$\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ הוא שדה הפיצול של הפולינום הספרבילי $(x^2-2)(x^2+1)$. מפני שאנחנו כבר יודעים כי $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},i):\mathbb{Q}]=4$, אז אנחנו גם יודעים שבחבורת גלואה יש 4 איברים. נבדוק האם היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ או $\mathbb{Z}_4$. נניח $\varphi$ איבר בחבורת גלואה. אנחנו כבר יודעים שחייב להתקיים

$$\varphi(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}, \qquad \varphi(i)=\pm i$$

ולכן הסדר של $\varphi$ בחבורת גלואה הוא לכל היותר 2. זה מחייב שחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. באופן שקול, ראינו כי חבורת גלואה במקרה כזה משוכנת ב-$S_2\times S_2$ והיא מסדר 4.

שווה לציין שאנחנו גם יודעים די בקלות איך האוטומורפיזמים האלה נראים. אנחנו יודעים שבסיס ל-$\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $1,\sqrt{2},i,\sqrt{2}i$. לכן למשל איזומורפיזם ששולח

$$\sqrt{2}\to-\sqrt{2}, \qquad i\to -i$$

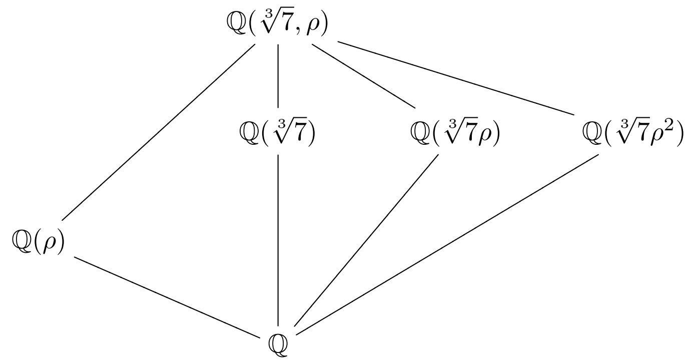
ישלח איבר כללי

$$\varphi(a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i)=a-b\sqrt{2}-ci+d\sqrt{2}i$$

סריג תת־השדות הוא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2},i) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr, no head] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}i) \arrow[d, no head] & \mathbb{Q}(i) \arrow[dl, no head] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

ב. יהי $\rho$ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. שורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{7}\rho^2$. מכאן קל לראות ששדה הפיצול של הפולינום הוא $E = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}, \rho]$. בפרט $[E : \mathbb{Q}] = 6$ כי $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}] = 3$ ו-$[\mathbb{Q}[\rho] : \mathbb{Q}] = 2$ זרים. בנוסף $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ משוכנת ב-$S_3$, שהיא חבורה מסדר 6 ולכן איזומורפית אליה. את סריג תת־החבורות של $S_3$ קל למצוא, ובעזרתו (והתאמת גלואה) נמצא את סריג תת־השדות




ג. יהי $\rho$ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 7. אז כמו בכיתה, נקבל $E = \mathbb{Q}(\rho)$ והממד הוא $[E : \mathbb{Q}] = 6$. כמו כן יש איבר בחבורת גלואה שמקיים $\varphi(\rho) = \rho^2$. זה איבר מסדר 6 כי

$$\varphi^6(\rho) = \rho^{64} = \rho = \mathrm{id}(\rho)$$

וזו החזקה הכי נמוכה שזה קורה. לכן חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

בזמן פרסום הפתרון, אתם כבר יודעים כי $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho), \mathbb{Q}) \cong U_7 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. החבורה פועלת טרנזיטיבית על השורשים $\rho, \rho^2, \dots, \rho^6$. נסמן ב-$\varphi_k$ את האיבר בחבורת גלואה שמקיים

$$\varphi_k(\rho) = \rho^k$$

וראינו כי $k \mapsto \varphi_k$ הוא איזומורפיזם של חבורות. לחבורה $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ יש בדיוק שתי תת־חבורות לא טריוויאליות, שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. בנוסף, האיבר $\varphi_3 \in G$ הוא יוצר (כי 3 יוצר של $U_7$) ולכן $\varphi_3^2, \varphi_3^3$ יוצרים את תת־החבורות הנוספות של $G$. שני שדות הביניים שאנחנו מחפשים הם $E^{\varphi_3^2}, E^{\varphi_3^3}$. נחשב

$$\varphi_3^2(\rho) = \rho^2 \qquad \varphi_3^2(\rho^2) = \rho^4 \qquad \varphi_3^2(\rho^4) = 1$$

מכאן נסיק כי $\rho + \rho^2 + \rho^4$ מיוצב על ידי $\varphi_3^2$. לכן $\mathbb{Q}(\rho + \rho^2 + \rho^4) \subseteq E^{\varphi_3^2}$ ומשיקולי ממד יש שיוויון. באופן דומה אפשר לעשות אותו חישוב עבור $\varphi_3^3$ ולקבל

$$\varphi_3^3(\rho) = \rho^6 \qquad \varphi_3^3(\rho^6) = 1$$

ולכן משיקולים דומים $E^{\varphi_3^3} = \mathbb{Q}(\rho+\rho^6)$. סריג תת־השדות הוא

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(\rho) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\rho+\rho^2+\rho^4) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(\rho+\rho^6) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

**שאלה 3.** קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות. אם לא, מצאו את הסגור הנורמלי שלהן.

א. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

ב. $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$ כאשר $\rho$ הוא שורש יחידה מסדר 7. רמז: זה קל לפי שאלה 2.

ג. $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^3)$.

פתרון.

א. ההרחבה לא נורמלית כי הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^3-2$ והשורשים הנוספים הם מרוכבים ולא שייכים לשדה.
הסגור הנורמלי הוא לספח את שאר השורשים (השורשים של הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}$ כבר שייכים לשדה): $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho_3, \sqrt[3]{2}\rho_3^2\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \rho_3\right]$.

ב. ההרחבה היא נורמלית, כי השורשים של הפולינום המינימלי של $\rho$ הם $\rho^i$ שכולם שייכים לשדה. מדובר באותם חישובים כמו בסעיף השלישי בשאלה הקודמת.

ג. הפולינום המינימלי של $t$ מעל $\mathbb{Q}(t^3)$ הוא $x^3-t^3$ ששורשיו המרוכבים לא שייכים לשדה, ולכן ההרחבה לא נורמלית. הסגור הנורמלי הוא $\mathbb{Q}(t,\rho_3)$ כאשר $\rho_3$ הוא שורש יחידה מסדר 3.

**שאלה 4.** נסמן שורש יחידה $\rho = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ מסדר 3. חשבו את הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{Q}$ של $2\rho + \sqrt[3]{49}$. רמז: העזרו בשאלה 2 ובפעולה של חבורת גלואה המתאימה.

פתרון. זה סיפוח של איבר אחד, ותחילה נגלה את מעלת הפולינום המינימלי שלו. כבר ראינו שחבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\rho, \sqrt[3]{7})/\mathbb{Q}$ היא $S_3$. ראינו כבר בתרגול שמעלת הפולינום המינימלי היא גודל המסלול של $2\rho + \sqrt[3]{49}$ תחת הפעולה של חבורת גלואה. השורשים של $x^3-7$ הם $\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{7}\rho^2$, ונסמן אותם $1,2,3$ בהתאמה. חבורת גלואה היא $S_3$ ולכן כל התמורות על קבוצת השורשים רלוונטיות. נבין מה כל תמורה עושה ל $2\rho + \sqrt[3]{49}$. שימו לב לאבחנה כי $\rho = \sqrt[3]{7}\rho/\sqrt[3]{7}$:

$\varphi_1 = \mathrm{id}$ מקבע את $2\rho + \sqrt[3]{49}$.

$\varphi_2 = (1\ 2)$ מחליף בין $\sqrt[3]{7}$ ל-$\sqrt[3]{7}\rho$ ולכן שולח את $\rho$ ל-$\frac{1}{\rho} = \rho^2 = -1-\rho$. לכן

$$\varphi_2(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho^2 + \sqrt[3]{49}\rho^2 = -2-2\rho-\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{49}\rho$$

$\varphi_3 = (1\ 3)$ שולח את $\rho$ ל-$\rho^2$ ולכן $\varphi_3(2\rho+\sqrt[3]{49}) = 2\rho^2+\sqrt[3]{49}\rho = -2-2\rho+\sqrt[3]{49}\rho$.

$\varphi_4 = (2\ 3)$ שולח את $\rho$ ל-$\rho^2$ ולכן $\varphi_4(2\rho+\sqrt[3]{49}) = 2\rho^2+\sqrt[3]{49} = -2-2\rho+\sqrt[3]{49}$.

$\varphi_5 = (1\ 2\ 3)$ שולח את $\rho$ ל-$\rho$ ולכן $\varphi_5(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho + \sqrt[3]{49}\rho^2 = 2\rho - \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{49}\rho$.

$\varphi_6 = (1\ 3\ 2)$ שולח את $\rho$ ל-$\rho$ ולכן $\varphi_6(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho + \sqrt[3]{49}\rho$.

קיבלנו שישה איברים שונים (הם שונים כי $1, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{49}, \rho, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{49}\rho$ הוא בסיס למרחב) ולכן המעלה של הפולינום המינימלי היא 6. הפולינום המינימלי עצמו הוא המכפלה של כל גורמים מהצורה $(x-b)$ כאשר $b$ הוא איבר במסלול. בעזרת מחשב נחשב שהוא

$$x^6 + 6x^5 + 24x^4 - 42x^3 - 198x^2 + 684x + 3249$$

בהצלחה!