משפט

$IS \in NPC$

תזכורת

IS - בעיית הקבוצה הבלתי תלויה:
$IS = \{(G,k) \,|$ בG יש קבוצה בלתי תלויה בגודל $k\}$
קבוצה בלתי תלויה היא קבוצה שאין קשתות בין קודקודיה.

הוכחת המשפט

$IS \in NP$: בהנתן פתרון, ניתן לבדוק בזמן פולינומי שהוא אכן קבוצה בגודל k שהינה ב"ת.

$IS \in NPH$: ברדוקציה מSAT. אבל נשתמש ב$3-SAT$:
$3-SAT = \{\psi |$ ψ בצורת $3-CNF$ וψ ספיקה$\}$. לדוגמה

$$\underbrace{(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x}_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)}_{C_3} \wedge \underbrace{(x_3 \vee \overline{x}_4 \vee x_2)}_{C_4}$$

יהיו $x_1, ...x_n$ המשתנים בψ ו$C_1, ...C_m$ הפסוקיות בψ. נבנה את הגרף G:

קודקודי הגרף: לכל פסוקית C_i ולכל ליטרל k_{ij} בC_i יהיה קודקוד מתאים לk_{ij}

הקשתות: שני סוגי קשתות:

קשתות פסוקיות: (קשתות כחולות) נחבר את שלושת הליטרלים של פסקיות במשולש.

קשתות משתנים: (קשתות אדומות) לכל משתנה x_i ולכל מופעים x_i ו$\overline{x}_i$ נשים קשת בין x_i ל$\overline{x_i}$

נראה שלψ הצבה מספק אם"ם בG קבוצה ב"ת בגודל k. נניח $S : \{x_1, ...x_n\} \to \{T, F\}$ הצבה מספקת לψ. נבנה קבוצה ב"ת A בG, k $|A| = k$.
S הצבה מספק לψ, כלומר לכל C_i ישנו ליטרל $l_{ij} \in C_i$ כך ש$S(l_{ij}) = T$.
נבחר את l_{ij} לקבוצה A. ע"פ בנייה $|A| = k$(כי לקחנו משתנה לכל פסוקית ו$k = m$) נותר להראות שA ב"ת. ואכן בA אין קשתות כחולות - כי לקחנו קודקוד בודד מכל משולש כחול(=פסוקית).

אין קשתות אדומות

נסתכל ב$l_{ij} \in A$, $l_{i'j'} \in A$. כיוון ש$S(l_{ij}) = T$ ו$S(l_{i'j'}) = T$ לא ייתכן שl_{ij} הינו שלילת $l_{i'j'}$. לכן אין קשת אדומה ביניהם

מצד שני

נניח A קבוצה ב"ת בגודל k בG. נבנה S הצבה מספקת לψ. נניח $l_{ij} \in A$(ליטרל של C_i)

- אם $l_{ij}=x_t$ אז נקבע $S\left(x_t\right)=T$
- אם $l_{ij}=\overline{x}_t$ אז נקבע $S\left(x_t\right)=F$
- ומשתנים שלא נקבעו בצורה זו יקבלו ערך כלשהו(נניח T)

נשים לב שS מוגדרת היטב, כיוון שבA אין ליטרלים שמתאימים למשתנה ושלילתו. S מספקת כי בכל פסוקית C_i הליטרל l_{ij} מקבל ערך T ובפרט C_i מקבל ערך T ולכן גם כל ψ מסופק. ■

צביעת גרף

צביעה חוקית של גרף היא צביעה שבה אין קודקודים באותו צבע שיש קשת ביניהם.

$Color=\{(G,k)\,|$יש צביעה של G בk צבעים$\}$

נשים לב שכל צבע מהווה קבוצה בלתי תלויה - לכן בעיית הצביעה בעצם שואלת אם ניתן לכסות את הגרף בk קבוצות בלתי תלויות.

$3-Color=\{G\,|$יש צביעה של G ב3 צבעים$\}$

ניתן לבנות בקלות רדוקציה פולינומית מ$Color$ ל$3-Color$:

$$3-Color\leq^{p}Color$$

$$(G,3)\in Color\Rightarrow G\in 3-Color$$

משפט

$$NPC\ni 3-Color$$

הוכחה

$NP\ni 3-Color$: ננחש\נקבל צביעה ונקבדו שאכן תקינה.

$NPH\ni 3-Color$

ברדוקציה מ$3-SAT$:

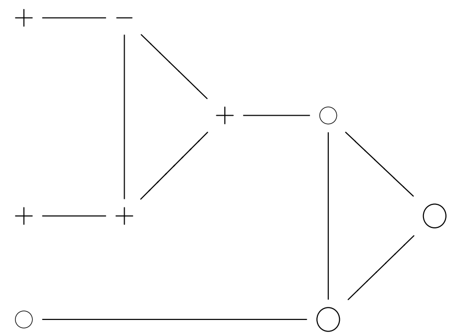
רוצים: בהינתן נוסחא ψ(בצורת $3-CNF$) לבנות גרף G כך שψ ספיקה אם"ם לG 3-צביעה.

יהיו $x_1,...x_n$ המשתנים ו$C_1,...C_m$ הפסוקיות בψ. לכל משתנה x_i ושלילתו $\overline{x}_i$ יהיה קודקוד בG. בנוסף 3 קודקודים מיוחדים B,F,T מחוברים במשולש.

כמו כן לכל i x_i, $\overline{x}_i$ וB מחוברים במשולש.

נבנה חפיץ(Gadget) שהינו גרף עם 3 "כניסות" ו"יציאה" אחת, כך שהיציאה יכולה להיצבע בצבע T אם"ם לפחות אחת מהכניסות אינה קבוצע בF(כלומר צבועה בT)

החפיץ נותן לנו שיציאה יכולה להיצבע בירוק אם ורק אם לפחות אחת הכניסות ירוקה(+). אם כל היציאות אדומות(-), היציאה חייבת להציבע באדום:

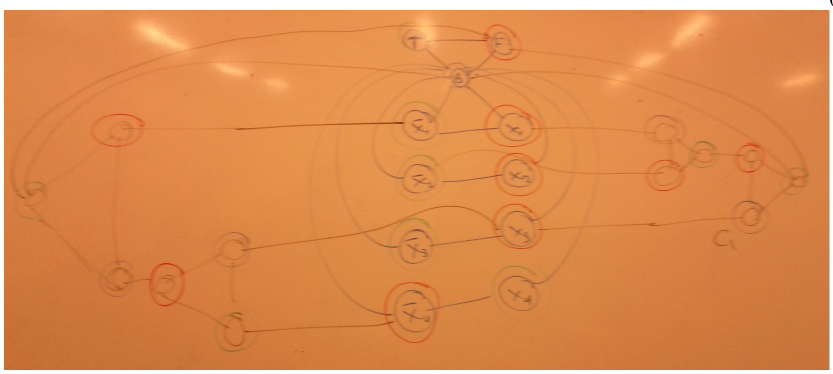


מתקיים

אם לψ הצבה מספקת S נבנה צביעה לG ב3 צבעים.

לF,T,B ניתן את הצבעים F,T,B בהתאמה. לכל משתנה x_i ניתן לקודקוד x_i את הצבע $S\left(x_i\right)$ ולקודקוד $\overline{x}_i$ $S\left(\overline{x}_i\right)$.

כיוון שS הצבה מספקת בכל פסוקית לפחות אחד הליטרלים מקבל ערך T, ולכן גם בכל חפיץ לפחות אחת מהכניסות צבועה בצבע T $\Leftarrow$ ניתן לצבוע את החפיץ כולו כך שהיציאה תהיה בצבע T. זוהי צביעה תקינה לגרף כולו(כי היציאות לא מחוברות לT)



בכיוון השני

נניח צביעה של G בשלושה צבעים. נראה הצבה מספקת S לψ

ההצבה

בה"כ הצבעים של F,T,B הינם F,T,B בהתאמה. לכל x_i אם x_i צבוע T אזי $S\left(x_i\right)=T$. אם x_i צבוע T אזי $S\left(x_i\right)=F$. לא ייתכן שx_i צבוע B(כי מחובר לB).

נשים לב שבהכרח לכל i הצבע של $\overline{x}_i$ הינו הערך של $\overline{x}_i$ לפי ההשמה.

נסתכל בפסוקית C_j ונראה שC_j מסופקת. כלומר ישנו ליטרל בC_j שמקבל ערך T.

נסתכל בחפיץ שמתאים C_j. הכניסות לחפיץ הינם הליטרלים של C_j. כיוון שהצביעה

חוקית בהכרח היציאה של החפיץ צבועה בT $\Leftarrow$ לפחות אחת הכניסות צבועה בT, כנדרש. ■

$IS=\{(G,k)\,\big|\,k$ קבוצה ב"ת בגודל Gב$\}$.
$IS \le^p 3-IS$, ואת $3-IS$ ניתן לפתור בזמן פולינומי:

$$\binom{n}{3} < n^3 \le O\left(|G|^3\right)$$

$58-VC=\{G\,\big|\,$בG ישנו VC בגודל$\le 58\}$ גם פולינומית:

$$n^{58}$$

מעגל המילטוני

משפט

בעיית המעגל ההמילטוני בגרף מכוון הינה NPC

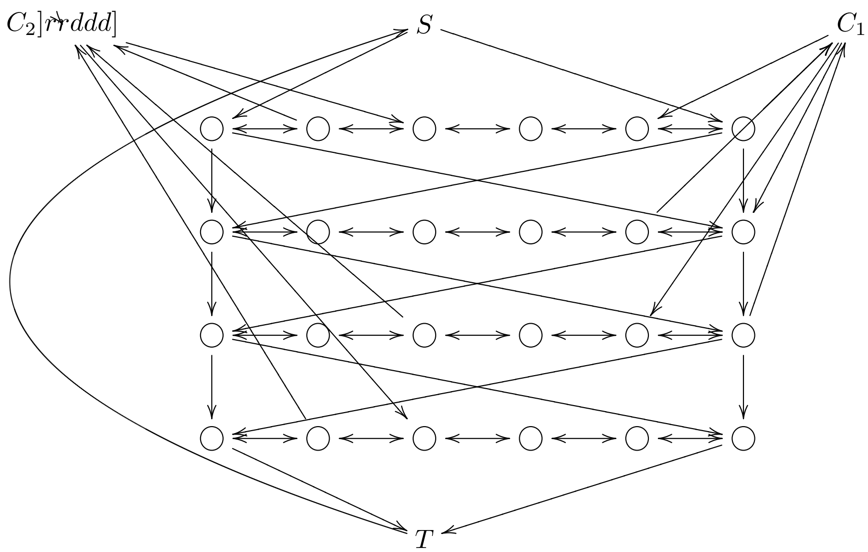
הוכחה

$D-HAM \in NP$: ננחש מעגל ונבדוק.

$D-HAM \in NPH$:

ברדוקציה מ$3-SAT$. כלומר רוצים בהנתן נוסחא ψ לבנות גרף מכוון G כך שψ ספיקה אם"ם בG מעגל מכוון.
יהיו $x_1,...x_n$ המשתנים בψ ו$C_1,...C_n$ הפסוקיות בψ.

לכל שורה של קודקודים ניצור שורה של קודקודים באורך $3m$:



אם יש הצבה מספקת יש מעגל המילטוני(מS לT), ואם יש מעגל המילטוני נסתכל באיזה כיוונים אנו מכסים את כל הקודקודים, וזה נותן הצבה מספקת.