הקדמה קצרה למד"ח

מסרים

- צריך מד"ר לפתור מד"ח!
- יש לנסות להבין כל משוואה!

מה זה מד"ח?

מד"ח זה קשר בין פונקציה של כמה משתנים והנגזרות החלקיות שלה.

לדוגמה

1. $u(x,y)$

   נתונות שתי פונקציות $\begin{cases} b(x,y) \\ c(x,y) \end{cases}$ ונמסים למצוא פונקציה u שמקיימת $\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y)$.

   מסדר ראשון, ליניארית

2. $u(x,y,z)$

   $\nabla^2 u = 0$ (לפלסיאן . הגראדייאנט הוא $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$. הלפלסיאן הוא $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$)

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

   מסדר שני, ליניארית

3. $u(x,y)$

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial u}{\partial x}$$

   מסדר שלישי, לא ליניארית בגלל ה"$u\frac{\partial u}{\partial x}$"

באופן כללי

באופן כללי יש למד"חים הרבה פתרונות. לא רק קבועים חופשיים - יש <u>פונקציות חופשיות</u>.

- $u(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftarrow u(x) = C$ - קבוע חופשי

- $u(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Leftarrow u(x,y)=C(y)$ - פונקציה חופשית
- $u(x,y,z)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Leftarrow u(x,y,z)=C(y,z)$ - פונקציה חופשית בשני משתנים

לכל משוואה יש צורך בתנאים נוספים(תנאי התחלה, תנאי שפה) כדי לקבוע פתרון יחיד.

מד"ח ליניארית

הפונקציה הלא ידועה וכל נגזרותיה מופיעות באופן ליניארי.

המשוואות של הפיסיקה המתמטית

1. משוואת לפלס
   מספר המשתנים הוא מספר המימדים:
   - שני מימדים - $u(x,y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
   - שלושה מימדים - $u(x,y,z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
   - באופן כללי - $\nabla^2 u=0$
2. משוואת החום/משוואת הדיפוזיה(diffusion)
   מימד מרחבי אחד(מימד הזמן הוא נפרד)
   - מימד 1 - $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, k קבוע
   - 2 מימדים - $u(x,y,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
   - באופן כללי - $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u}$

   משמעות משוואת החום - לאחר מדידת החום בחדר בנקודה מסויימת, כיצד החום יתפשט בחדר עם הזמן?
3. משוואת הגלים $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u}$ (c קבוע). מודד תנודה של גל בעקבות מכה בכל נקודה בהתאם לזמן.

באופן כללי, משוואת לפלס $\boxed{\nabla^2 u=0}$ [1] מתארת מצב מתמשך בהרבה תופעות פיזיקליות(גרביטציה, אלקטרומגנטיקה ועוד)

[1] את ההכפלה ע"י קבוע ניתן להשיג ע"י שינוי קואורדינטות

4. משוואת פואסון(Poisson) $\nabla^2 u = f(x,y)$ כאשר $f(x,y)$ פונקציה ידועה. (משוואת לפלס לא הומוגנית)

5. משוואת שרודינגר(Schrodinger) $\psi(x,y,z,t)$, ψ מרוכב

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + v(x,y,z)\psi$$

כאשר v פונקציה ידועה, m מסה, $\hbar$ קבוע פלנק Planck's constant.

שיטות לפתרון מד"ח

1. משוואת לפלס על הריבוע

מצא $u(x,y)$ כך ש

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$0 \le x, y \le 1$$

$$u(0,y) = 0$$

$$u(1,y) = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(x,1) = f(0) \quad (*)$$

כאשר $f(x)$ פונקציה ידועה.

שיטת הפתרון

קודם כל נשכח מהתנאי $(*)$ שהוא התנאי היחיד שאינו הומוגני. לכל שאר התנאים - אם יש פתרונות ניתן לצרף אותם ליניארית למצוא עוד פתרון.

- למצוא הרבה פתרונות של כל התנאים למעט $(*)$
- למצוא צירוף ליניארי מיוחד המקיים $(*)$

לשלב הראשון: נחפש פתרונות בצורה $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(X)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -c$$

כלומר פונקציה של x שווה לפונקציה של y אם"ם הן קבועות.

$$X(1)=0 \quad X(0)=0 \quad X''=-cX$$

$$Y(0)=0 \qquad Y''=cY$$

- לגבי Y:
  $\lambda^2=c$. נניח c חיובי, $\lambda=\pm\sqrt{c}$

$$Y=C_1e^{\sqrt{c}y}+C_2e^{-\sqrt{c}y}$$

$Y(0)=0 \Leftarrow Y(y)=C_1\left(e^{\sqrt{c}y}-e^{-\sqrt{c}y}\right)$

- לגבי X:
  $\lambda^2=-c$, $\lambda=\pm i\sqrt{c}$

$$X=C_1\cos\sqrt{c}x+C_2\sin\sqrt{c}x$$

$X(0)=0 \Leftarrow C_1=0 \Leftarrow XC_2\sin\sqrt{c}x$

$X(1)=0 \Leftarrow C_2\sin\sqrt{c}=0$

ניקח $\sqrt{c}=n\pi$, $X(x)=C_2\sin(n\pi x)$, $n=1,2,...$

מצאנו את הפתרונות הבאים של כל התנאים למעט $(*)$:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)=K_n\sin(n\pi x)\left(e^{n\pi y}-e^{-n\pi y}\right), n=1,2,3,...$$

כאשר K_n קבוע, אולי שונה לכל n.
נשאר לעשות צירוף ליניארי

$$(**) \quad u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n\sin(n\pi x)\left(e^{n\pi y}-e^{-n\pi y}\right)$$

יש לבחור את הקבועים $K_1,K_2,K_3,...$ לקיים את התנאי האחרון $u(x,1)=f(x)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}K_n\left(e^{n\pi}-e^{-n\pi}\right)\sin n\pi x=f(x)$$

בסמסטר הבא נלמד איך לבחור פונקציה $f(x)$ כצירוף לינארי(אינסופי) של הפונקציות

$$\sin\pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, ...$$

ניתן לעשות כן!!! ולכן יש פתרון למד"ח בצורה $(**)$

2. משוואת הלמוץ (Helmoltz)

$u(x,y)$, $\nabla^2 u = -u$ ($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) במעגל $\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$
על $x^2+y^2=1$ נתון u כפונקציה של θ.

שיטת הפתרון

צריך לעבור לקואורדינטות קוטביות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} - \sin\theta\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) + r\cos\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$$

$$= -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

נסדר את זה ונקבל שהלפלסיאן בקואודרינטות קוטביות הוא

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}}$$

בקואורדינטות קוטביות יש

$$u(r,\theta) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = -u$$

בתחום $r<1$. נתון $u(1,\theta)$.
נחפש פתרונות של המשוואה בצורה

$$u(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$$

$$R''(r)\,T(\theta)+\frac{1}{r^2}R(t)\,T''(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\,T(\theta)=-R(r)\,T(\theta)$$

נכפיל ע"י $\frac{r^2}{R(r)\,T(\theta)}$.

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)}+\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}+\frac{rR'(r)}{R(r)}=-r^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1) & \frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=-c\\ (2) & \frac{r^2R''(r)}{R(r)}-c+\frac{rR'(r)}{R(r)}=-r^2\end{cases}$$

נפתור את המשוואת:

(1) $T''=-cT$. מחפשים פתרון מחזורי עם מחזור 2π. הפתרון הוא $T(\theta)=C_1\cos(\sqrt{c}\theta)+C_2\sin(\sqrt{c}\theta)$ $\Leftarrow$ $\sqrt{c}=n$, $n=1,2,3,...$

(2) $r^2R''+rR'+\left(r^2-n^2\right)R=0$
זוהי משוואת בסלן"$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$", ν שלם]
$R(r)=C_1J_n(r)+C_2Y_n(r)$(כאשר J_n פונקציית בסל וY_n פונקציית נוימן)
יש לקחת $C_2=0$ כי $Y_n(r)$ מתבדר כאשר $r=0$

סה"כ פתרונות

$$u(r,\theta)=R(r)\,T(\theta)=J_n(r)\left(K_n\cos n\theta+L_n\sin n\theta\right)$$

כאשר K_n,L_n קבועים.
יש לצרף ליניארית לקיים את התנאי "$u(1,\theta)$ נתונה".

.3

$\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y)$, $\begin{cases}b(x,y)\\ c(x,y)\end{cases}$ פונקציות נתונות. (צריך עוד תנאי!)

שיטת הפתרון

אולי ניתן למתצוא עקומה(או עקומות) כך שהפתרון על העקומה ניתן למצוא דרך מד"ר?
$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$
על העקומה $u=u(x(t),y(t))$ היא פונקציה של t

$$u'(t)=\frac{\partial u}{\partial x}x'+\frac{\partial u}{\partial y}y'$$

נבחר $\begin{cases}x'=1\\ y'=b(x,y)\end{cases}$ - זה מגדיר עקומה למעט נקודת התחלה. אזי $u'=c(x,y)$

• דוגמה קונקרטית: $\begin{array}{c} b(x,y)=y-x \\ c(x,y)=2x \end{array}$.

$x(t)=x(0)+t \Leftarrow x'=1$
$y'=y-(x(0)+t)$ ... נעשה הצבה

$$y(t)=z(t)e^{t}$$

$$z'e^{t}+ze^{t}=ze^{t}-(x(0)+t)$$

$$z'=-(x(0)+t)e^{-t}$$

$$z=(x(0)+1+t)e^{-t}+C$$

$$y=x(0)+1+t+Ce^{t}=x(0)+1+t+(y(0)-1-x(0))e^{t}$$

העקומות הן

$$\begin{cases} x(t)=x(0)+t \\ y(t)=x(0)+1+t+(y(0)-1-x(0))e^{t} \end{cases}$$

על כל עקומה ניתן למצוא u דרך $\begin{array}{c} u'=c(x,y)=2x=2(x(0)+t) \\ u(t)=t^{2}+2x(0)t+u(0) \end{array}$

אם נתון u בנוקדה אחת דל עקומה ניתן למצוא בגל נקודה של העקומה
כדי לפתור את המד"ח יש לתת u נקודה אחת של כל עקומה.

העקומות האלה נקראות "עקומות מאפיינות" characteristic courses - [עקומה כך שניתן לפתור את המד"ח על העקומה על ידי מד"ר]