

שיעורי בית 4

4 בדצמבר 2016

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

$$H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G \quad (\text{א})$$

$$H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G \quad (\text{ב})$$

$$H = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n \times n} = G \quad (\text{ג})$$

$$H = \{g^n \mid g \in G\} \quad .n \in \mathbb{N} \quad \text{ו } G \text{ חבורה} \quad (\text{ד})$$

$$H = \{g^n \mid g \in G\} \quad .n \in \mathbb{Z} \quad \text{ו } G \text{ חבורה חילופית} \quad (\text{ה})$$

$$H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4 \quad (\text{ו})$$

$$H = \{x^3 \mid x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5 \quad (\text{ז})$$

$$H = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \frac{b}{4} \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{Q} \quad (\text{ח})$$

2. לכל $\sigma \in S_n$ נגדיר $\sigma(I) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ להיות מטריצה $n \times n$ שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י הפעלת התמורה על השורות. כלומר

$$R_i(\sigma(I)) = e_{\sigma^{-1}(i)}$$

כאשר $R_i(\sigma(I))$ מסמל את השורה ה- i של המטריצה $\sigma(I)$.

למשל אם $[\sigma^{-1} = (4, 2, 1) \Leftarrow] \sigma = (1, 2, 4) \in S_4$ אזי

$$\sigma(I) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & e_4 & - \\ - & e_1 & - \\ - & e_3 & - \\ - & e_2 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & e_{\sigma^{-1}(1)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(2)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(3)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(4)} & - \end{pmatrix}$$

במילים אחרות. הוקטור e_i (ששוה לשורה ה i ית של I) עובר לשורה $\sigma(i)$.
 הוכיחו כי $H = \{\sigma(I) : \sigma \in S_n\}$ תת חבורה של $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : |A| \neq 0\}$
 המטריצות ההפיכות (שימו לב שהפעולה היא כפל מטריצות).

3. תהא G עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n - 1$ איברים.

4. תהא G חבורה $H_1, H_2 \leq G$ הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$