3 תרגול 3

1. תהא A מטריצה עם $rank(A)=1$.

(א) הוכיחו שלכל $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ מתקיים: $A-xI$ הפיכה או $A-yI$ הפיכה.
הוכחה: ע"ע 0 עם ר"ג $n-1=$ ולכן לפחות ר"א$=n-1$ ולכן יש עוד ע"ע אחד לכל היותר. לכן לא יתכן ש־x,y יהיו שניהם ע"ע. אבל אם בשלילה $A-3I, A+3I$ לא הפיכות ז"א ש־x,y ע"ע (יש v שמאפס את $A-xI$ והוא וקטור עצמי מתאים ל־x).

(ב) האם בהכרח קיים $x\neq 0$ כך ש־ $A-xI$ לא הפיכה? לאו דוקא, כי עבור $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ אין כזה.

2. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה המוגדרת ע"י: $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y+z\\x+y+2z\end{pmatrix}$.
ייצגו העתקה זו מעל הבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, הראו שהיא לכסינה ולכסנו אותה מעל בסיס זה.
פתרון: זו בעצם העתקה לינארית, שניתן לייצגה, מעל הבסיס הסטנדרטי, ע"י המטריצה: $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. לפי תרגול קודם היא לכסינה מעל בסיס זה ולכן לכסינה מעל כל בסיס. איך מלכסנים אותה מעל בסיס B? מייצגים אותה מעל B, כלומר, מוצאים את $[T]_B^B$, ואז לכל ע"ע מוצאים את המרחב העצמי, לוקחים בסיס למרחב העצמי, ומהם לוקחים את הוקטורים שהם מייצגים לפי B . אם $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ אזי: $[T]_B^B=\begin{pmatrix}|&&|\\ [T(v_1)]_B&\ldots&[T(v_n)]_B\\ |&&|\end{pmatrix}$. לכן נקבל:

$$[T]_B^B=\left(\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B\left[\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\right]_B\left[\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right]_B\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&4\end{pmatrix}$$

(כבר רואים שיש אותם ערכים עצמיים), והוקטורים המתאימים ל־1:

$$V_1=N\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

וקטורים אלה מייצגים, לפי B, את: $\left\{v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

הוקטור המתאים ל־4:

$$V_4=N\left(\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

וקטור זה מייצג, לפי B, את $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. כלומר:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. עכבר מבקר בשלושה בתים באופן הבא: אם הוא בבית 1 הוא חוזר אליו בהסתברות 1. אם הוא בבית 2 אז בהסתברות $\frac{1}{2}$ עובר ל־1 או נשאר ב־2. אם בבית 3 אז בהסתברות $\frac{1}{3}$ מחליט איזה בית מהשלושה. מה ההסתברות לאחר n ימים למציאותו בבכל בית, בהינתן התפלגות התחלתית $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$?

וקטור עצמי מתאים ל־1 הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, לחצי $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ולשליש $\begin{pmatrix} 13 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$. ונקבל $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.