

פיתרון תרגיל 3 באלגברה לינארית 1

שאלה 1:

א:

המכפלה BA אינה חוקית ע"פ הגדרת כפל מטריצות מכיוון שמספר העמודות של מטריצה B שונה ממספר השורות של מטריצה A.

ב:

הביטוי $AC + D$ מוגדר היטב ויהווה מטריצה מסדר 4×2 .

ג:

הביטוי אינו מוגדר מכיוון שהמטריצה AE הינה מסדר 4×4 ואילו המטריצה B הינה מסדר 4×5 ולפי הגדרת חיבור מטריצות ניתן לבצע חיבור שכזה אך ורק בין 2 מטריצות מאותו הסדר.

ד:

ביטוי זה אינו מוגדר היטב מכיוון שלא ניתן לבצע את המכפלה AB כי מספר העמודות של A שונה ממספר השורות של B.

ה:

הביטוי מוגדר היטב ויהווה מטריצה מסדר 5×5 .

ו:

הביטוי מוגדר היטב ויהווה מטריצה מסדר 5×2 .

שאלה 2:

א:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

ב:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1(-40) + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 15 = 1$$

$$a_{12} = 1 \cdot 16 + 2(-5) + 3(-2) = 0$$

$$a_{13} = 1 \cdot 9 + 2(-3) + 3(-1) = 0$$

$$a_{21} = 2(-40) + 5 \cdot 13 + 3 \cdot 5 = 0$$

$$a_{22} = 2 \cdot 16 + 5(-5) + 3(-2) = 1$$

$$a_{23} = 2 \cdot 9 + 5(-3) + 3(-1) = 0$$

$$a_{31} = 1(-40) + 0 \cdot 13 + 8 \cdot 5 = 0$$

$$a_{32} = 1 \cdot 16 + 0(-5) + 8(-2) = 0$$

$$a_{33} = 1 \cdot 9 + 0(-3) + 8(-1) = 1$$

ג:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^3 + \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 31 \\ 16 & 41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ו:

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & i \\ 2+i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

שאלה 3:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$2A-3B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix} \quad \text{ג.}$$

שאלה 4:

א. A היא מטריצה 2×2 ו- B היא מטריצה 2×3 , לכן המכפלה AB מוגדרת והיא מטריצה 2×3 .

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

ב. B היא מטריצה 2×3 ו- A היא מטריצה 2×2 . מאחר שהמספרים הפנימיים 3 ו- 2 אינם שווים, המכפלה BA אינה מוגדרת.

שאלה 5:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{5 \times 5}$$

$$S^{150} = (S^6)^{25} = I^{25} = I$$

$$S^{1001} = S^5 \cdot (S^6)^{166} = S^5 \cdot I = S^5$$