

(3)

ניקח את B להיות אלכסונית תחתונה ונמצא

$$B^t B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a = b = 0 \\ bd + ce = -2 \\ cf = 2 \Rightarrow c = 1 \\ d^2 + e^2 = 4 \Rightarrow d = 0 \\ ef = -4 \Rightarrow e = -2 \\ f^2 = 4 \Rightarrow f = 2 \end{cases}$$

לכן:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$B^t B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A$$

4)

אם A אלכסונית $\Rightarrow \exists P, D$: $A = P D P^{-1}$
אלכסונית יציבה

$$\Rightarrow f_A(x) = |A - xI| = |P| |D - xI| |P|^{-1} = f_D(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \quad f_A(x) = f_D(x)$$

כלומר:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כל

$$f_D(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

$$f_A(A) = f_D(A) = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_n I)$$

$$= P (D - \lambda_1 I) P^{-1} \cdots P (D - \lambda_n I) P^{-1}$$

כאשר $\forall i \quad D - \lambda_i I$ היא מטריצה אלכסונית עם 0 במקום ה-i.

— יחסית \$P = \Pi(D - \lambda_i I)\$

$$P_A(A) = L_D(A) = P(\Pi D - \lambda_i I) P^{-1} = P \cdot O \cdot P^{-1} = O$$

$$AB \text{ adj } BA = I \quad AB \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (3)$$

$$\downarrow$$

$$\text{rank, rank } AB$$

$$|AB \text{ adj } BA| = |AB| |adj BA| = 0 \neq |I|$$

$$\downarrow$$

$$\text{rank, rank } BA \quad (\rightarrow \text{ rank } adj(BA) \text{ מ } 2^*)$$

$$0 = |BA| = |B| |A| = |A| |B| = |A B|$$

$$AB(BA)^{-1} = |BA|^{-1} \underbrace{AB \cdot adj(BA)}_I = |BA|^{-1} I$$

$$|AB(BA)^{-1}| = |A| |B| |A|^{-1} |B|^{-1} = 1$$

$$| |BA|^{-1} I | = \left| \begin{pmatrix} |BA|^{-1} & & \\ & |BA|^{-1} & \\ & & |BA|^{-1} \end{pmatrix} \right| = |BA|^{-3}$$

$$|BA|^{-3} = 1 \Rightarrow 1 = |BA|^3 = |AB|^3$$

$$A, B \in \mathbb{R} \Rightarrow |AB| \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{|AB| = 1}$$

$$|BA| \underbrace{AB \text{ adj } BA}_I = |BA| I = BA \underbrace{adj(BA)}_I$$

$$\boxed{AB = BA}$$

$$A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

6

$$\{v_1, \dots, v_n\} \stackrel{\text{d.j.}}{\Leftrightarrow} \exists j: v_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k v_k \Leftrightarrow$$

$$\forall i \neq j \quad \langle v_j, v_i \rangle = \langle \sum \alpha_k v_k, v_i \rangle = \sum \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \alpha_k \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \sum \alpha_k \langle v_k, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow d.j. j-ה שורה
 \rightarrow α_k \rightarrow α_k
 \Downarrow
 $|A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הערות (1) (2)

$$f_A(x) = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = 0 \in \mathbb{R}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

$$A \text{ איננה } \text{Hermitian} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2)$$

$$A \leftarrow A^* A = (A^2 + I) A = A^3 + I = A(A^2 + I) = A A^*$$

$$A \leftarrow \text{איננה } \mathbb{C}^n \text{ Hermitian}$$

$$\text{איננה } \text{Hermitian} \Leftrightarrow \text{איננה } \text{Hermitian}$$

$$\text{איננה } \text{Hermitian} \Leftrightarrow \text{איננה } \text{Hermitian}$$

$$\exists p: p^* A p = \text{Hermitian} \Leftrightarrow \text{איננה } \text{Hermitian}$$

$$U = P^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\|T(v)\| = \|v\|$$

הערות (2)

$$\|T(v) + v\| = \|T(v)\| + \|v\| = 2\|v\|$$

↓

$$\|T(v) + v\|^2 = 4\|v\|^2$$

$$\|T(v) + v\|^2 = \|T(v)\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T(v), v \rangle + \|v\|^2 = 4\|v\|^2 = 2\|T(v)\|^2 + 2\|v\|^2$$

↓

$$\|T(v) - v\|^2 = \|T(v)\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle T(v), v \rangle + \|v\|^2 = \|T(v) - v\|^2 \Rightarrow T(v) - v = 0$$