אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 1

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. הוכח כי אם בחוג R, לכל $x \in R$ מתקיים $x^2 = x$ אזי R קומוטטיבי. [רמז: מהו $(x-y)^2$?]

פיתרון: יהיו $x, y \in R$. לפי דיסטריבוטיביות, $(x-y)^2 = x^2 - xy + yx - y^2$. מצד אחד מתקיים $x^2 - xy + yx - y^2 = x - xy + yx - y$. מצד שני מתקיים $(x-y)^2 = x - y$, ולכן $x - xy + yx - y = x - y$, משמע $xy = yx$.

2. תהי S קבוצה. נסמן $R = P(S)$ (קבוצת החזקה). בכל סעיף אמור האם R הוא חוג בהינתן הפעולות הנתונות. אם כן אז אמור מהו איבר אפס ומהו איבר היחידה ותן נוסחא לאיבר הנגדי:

a. $A + B = A \cup B$, $A \cdot B = A \cap B$.

b. $A + B = A \cup B \setminus (A \cap B)$, $A \cdot B = A \cap B$.

פיתרון: במקרה הראשון איננו מקבלים חוג. זאת משום שאיבר האפס הוא ϕ, אולם לכל קבוצה שאיננה איבר האפס אין קבוצה נגדית.

במקרה השני אנחנו מקבלים חוג [הוכחה טכנית]. איבר האפס הוא ϕ, כל קבוצה היא הנגדית של עצמה ואיבר היחידה הוא S.

3. יהי R חוג ויהי איבר $0 \neq z \in R$ שעבורו קיים $w \neq 0$ כך ש $zwz = 0$. הוכח או הפרך:

a. z מחלק אפס.

b. $zw = wz = 0$.

פיתרון: הסעיף הראשון נכון. אם $zw \neq 0$ אזי מתקיים $yz = 0$ עבור $y = zw \neq 0$ ולכן z הוא מחלק אפס. אחרת, $zw = 0$ ואז מכיוון ש $w \neq 0$, z הוא מחלק אפס.

הסעיף השני לא נכון. אם ניקח למשל $R = \mathbb{Z}_4$, $z = 2$ ו $w = 1$ נקבל $zwz = 0$ אבל לא $zw = wz = 0$.

4. האם הקבוצות הבאות של מטריצות מהוות חוגים לפי הפעולות הסטנדרטיות כאשר F שדה:

a. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(F)$.

b. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & c \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(F)$.

פיתרון: בסעיף הראשון, כן. [מספיק להראות סגירות לכפל, חיבור ונגדי]

בסעיף השני אין חוג, משום שאין סגירות לכפל, למשל $A \notin \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$.

5. מצאו את כל תת-החוגים של $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ [חיבור וכפל רכיב-רכיב]. אמרו לאילו מהם יש יחידה ולאילו אין.

פיתרון: כל תת-חוג של $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ הוא תת-חבורה חיבורית. תת החבורות האלו הן $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \times 2\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{Z}_4$. צריך להוכיח רק סגירות לכפל ומקבלים שאלו הם תת-החוגים.