פתרון המבחן בקישור הבא.

1. צטטו והוכיחו את למת קנטור.

הלמה של קנטור:

תהי סדרה של קטעים המוכלים כל אחד בקודמו, כך שסדרת אורכי הקטעים שואפת לאפס.

אזי קיימת נקודה יחידה c בחיתוך של כל הקטעים.

הוכחה:

נסמן את הצדדים השמאליים של הקטעים בa_n ואת הצדדים הימניים בb_n

$I_n = [a_n, b_n]$

כיוון שהקטעים מוכלים כל אחד בקודמו, a_n עולה, וb_n יורדת.

שתיהן חסומות ולכן מתכנסות למספרים סופיים.

כיוון שסדרת אורכי הקטעים שואפת לאפס, בעצם נתון כי $b_n - a_n \to 0$ ולכן שתיהן שואפות לאותו גבול סופי c.

לכל n מתקיים כי $a_n \le c < b_n$ ולכן $c \in I_n$ ולכן c נמצא בחיתוך כל הקטעים.

אם הייתה נקודה נוספת בחיתוך כל הקטעים, $d \neq c$ אז אורך כל קטע היה לפחות $|d - c|$ בסתירה לכך שסדרת אורכי הקטעים שואפת לאפס.

דוגמא לשימוש בלמה של קנטור (שאינו משפט ערך הביניים)

משפט בולצאנו-ויירשטראס – לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

איך אנחנו הוכחנו אותו? הוכחנו שלכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית, ואז בפרט במקרה זה היא תת סדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

איך מוכיחים את בולצאנו-ויירשטראס עם הלמה של קנטור?

נתון שהסדרה חסומה בקטע $[a, b]$ נחלק את הקטע לשניים.

בלפחות אחד מהקטעים נמצאים אינסוף איברים מהסדרה, נבחר אותו.

אפשר לחזור על הטיעון הזה אינסוף פעמים, כל פעם אורך הקטע קטן פי 2, אך תמיד יש בו אינסוף איברים.

ומכאן קל לבנות תת סדרה שמתכנסת לנקודה בחיתוך כל הקטעים.

2. א. חשבו $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר $a_1 = 4$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$

$$a_1 = 4, \qquad a_2 = \sqrt{6}$$

ננחש שהסדרה יורדת, וננסה להוכיח שזה אכן המצב.

אכן $a_2 < a_1$

יהי n עבורו $a_{n+1} < a_n$

נוכיח כי $a_{n+2} < a_{n+1}$

צ"ל כי

$$\sqrt{2+a_{n+1}} < \sqrt{2+a_n}$$

נעלה בריבוע, נצמצם ב2 ונקבל שזה נכון כי $a_{n+1} < a_n$.

כיוון שכל איבר פרט לראשון מוגדר כשורש, כל איברי הסדרה אי שליליים (זה בלי אינדוקציה), ולכן הסדרה חסומה מלמטה ע"י אפס וסה"כ מתכנסת לגבול סופי.

נסמן $a_n \to L$ ונשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n}$$

$$L = \sqrt{2+L}$$

$$L^2 = 2 + L$$

$$L^2 - L - 2 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

שתי דרכים להסביר מדוע $L = 2$ בהכרח:

1. הסדרה חסומה מלרע ע"י אפס, ולא ייתכן שהיא שואפת למספר שקטן מאפס.
2. נשים לב ש$L = -1$ כלל <u>אינו פתרון</u> של $L = \sqrt{2+L}$, אנחנו בעצם הוספנו פתרון בדרך.

סה"כ $a_n \to 2$

ב. חשבו $\lim_{x\to1} \frac{(x-1)^5 \ln x}{\left[1-\cos(x-1)\right]^2 \sin^2(\pi x)}$

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{(x-1)^2}{1-\cos(x-1)}\right)^2 \cdot \frac{\ln\left(1+(x-1)\right)}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{\sin(\pi x)}\right)^2 = 2^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sin(\pi x)} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to1} \frac{1}{\pi\cos\left(\pi x\right)} = -\frac{1}{\pi}$$

3. קבעו אם כל טור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n+n}{n^2}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n4^n}{2^n+5^n}$ ג. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2\sqrt{n^4-n^2}}$

סעיף א':

נפצל לשני טורים, ומכאן נלמד על הטור הכללי (כאשר לא בטוח שהטור שווה לסכום הטורים)

$$\sum\frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n^2}=\sum\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$$

זה מתכנס בהחלט כי

$$\frac{|\sin(n)|}{n^{1.5}}\leq\frac{1}{n^{1.5}}$$

כמו כן

$$\sum\frac{n}{n^2}=\sum\frac{1}{n}$$

מתבדר.

לכן הטור המקורי הוא סכום של מתבדר ועוד מתכנס ולכן הוא מתבדר.

הסבר: נב"ש שהוא מתכנס ואז נקבל כי הטור ההרמוני מתכנס כסכום מתכנסים:

$$\sum\frac{\sqrt{n}\sin(n)+n}{n^2}-\sum\frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n^2}=\sum\frac{1}{n}$$

סעיף ב' נשתמש במבחן השורש

$$\sqrt[n]{\frac{3^n+n4^n}{2^n+5^n}}=\frac{\sqrt[n]{n}\cdot 4}{5}\cdot\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}}\to\frac{1\cdot 4}{5}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{5}<1$$

והטור מתכנס (בהחלט)

סעיף ג'

$$\sum\frac{(-1)^n n}{2\sqrt{n^4-n^2}}=\sum\frac{(-1)^n n}{2n\sqrt{n^2-1}}=\sum\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n^2-1}}$$

נבדוק התכנסות בהחלט $\sum\frac{1}{n}\sim\sum\frac{1}{2\sqrt{n^2-1}}$ (קל להוכיח), ולכן אינו מתכנס בהחלט

אבל, כן מתכנס לפי לייבניץ כי $\frac{1}{2\sqrt{n^2-1}}$ שואפת מונוטונית לאפס, ולכן סה"כ הטור מתכנס בתנאי.

6. תהי $f(x)$ מוגדרת ובעלת נגזרת רציפה בקטע I. עוד נניח שלכל $x \in I$

$$[f'(x)]^3 - 3[f'(x)]^2 + 2[f'(x)] \neq 0$$

הוכיחו ש- $f(x)$ מונוטונית ב- I.

$$f'(x)\left(\left(f'(x)\right)^2 - 3f'(x) + 2\right) \neq 0$$

בפרט, $f'(x) \neq 0$

ולכן הנגזרת לא יכולה להחליף סימן, כיוון שהיא רציפה ואם הייתה מחליפה סימן אז לפי ערך הביניים היא הייתה חותכת את הציר.

הנגזרת בעלת סימן קבוע ולכן f מונוטונית בקטע.