מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 13

תרגיל*: (*האוניברסליות של קבוצת* Cantor) התנאים הבאים שקולים:

א. מ"ט X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קבוצת קנטור C.

ב. X קומפקטי, מטריזבילי ו $\dim X=0$.

משפט (*האוניברסליות של קוביות* Tychonoff)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in T_{3.5}$

2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

3. ל X יש קומפקטיפיקציה.

הוכחה:

1 $\Leftarrow$ 2 $X\in T_{3.5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $\{f_s:X\to[0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $S:=C(X,[0,1])$). אז פונקצית האלכסון $f=\Delta_{s\in S}f_s:X\to[0,1]^S$ שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקצית האלכסון.

2 $\Leftarrow$ 3 אם $f:X\to[0,1]^S$ שיכון טופולוגי אז הוא משרה קומפקטיפיקציה

$$f:X\to Y:=\overline{f(X)}\subseteq[0,1]^S$$

לפי משפט Tychonoff $[0,1]^S\in Comp$. האוסדורפיות תכונה כפלית. לכן $[0,1]^S\in Comp\cap T_2$. אז גם $Y\in Comp\cap T_2$.

3 $\Leftarrow$ 1 נזכיר ש $Y\in Comp\cap T_2\subset T_4\subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.

☺

משפט (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in Metriz\cap B_2$ (שקול: $X\in Metriz\cap Sep$).

2. X משוכן לתוך קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

הוכחה: (נדלג על ההוכחה)

1 $\Leftarrow$ 2 בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

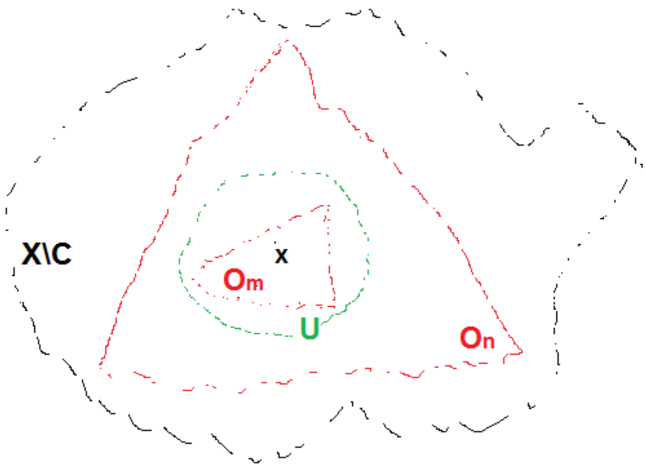
נתון $X \in Metriz \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \to [0,1]$ כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0,\ f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $Metriz \subseteq T_4 = T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x \notin C$ ו C סגורה. $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור סביבה פתוחה $O_n \in \gamma$ כך ש $x \in O_n \subset X \setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)} \subset B[x,\varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז פונקצית אוריסון $f_{m,n} : X \to [0,1]$ מפרידה x, C (כי היא מפרידה $\overline{O_m},\ X \setminus O_n$)

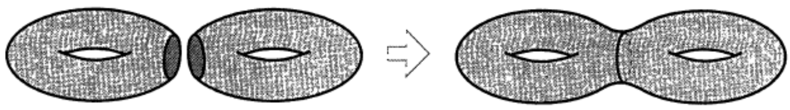
2 $\Leftarrow$ 1 $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Metriz \cap B_2$ וכן גם כל תת מרחב שלו (כי $Metriz, B_2$ תכונות תורשתיות).

☺

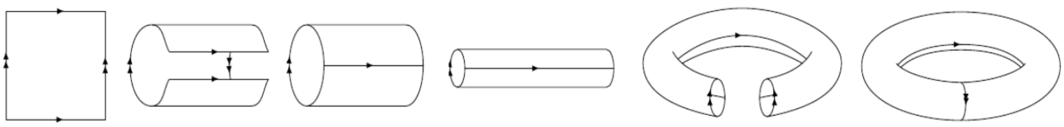
מידע: אפשר להוכיח משפט Urysohn $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$ (ראו למשל: J.R. Munkres Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

טופולוגית מנה -- Quotient topology



למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר:
תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית".
למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

נניח (X,τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק חלקים מסוימים".

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה ? מה הן ההגדרות המתאימות ?

<u>תזכורת</u> (מתורת הקבוצות) נניח $\sim$ יחס שקילות בקבוצה X. נסמן:

- $[a]:=\{x\in X \mid a\sim x\}$ מחלקה של איבר a
  (תמיד $a\in[a]$ ויש חלוקה $X=\coprod_{a\in X}[a]$)
- $X/\sim \; :=\{[a]:a\in X\}$ "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות
- $a\mapsto[a]$ $\rho: X\to X/\sim$ "פונקציה (העתקה) טבעית" (תמיד **על**)

<u>שאלה</u>: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב $X/\sim$ כאשר X מרחב טופולוגי ?

<u>שקול</u>: נתונה פונקציה <u>על</u> $\mathrm{q}: X\to Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $a\sim b \Leftrightarrow q(a)=q(b)$ אז נקבל יחס שקילות כך ש

Y וקבוצת מנה $X/\sim$ הם באותו תפקיד.

רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $\mathrm{q}: X\to Y$.

<u>הגדרה</u>: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $\mathrm{q}: X\to Y$. אומרים ש σ **טופולוגית המנה** (ביחס לפונקציה $\mathrm{q}:(X,\tau)\to Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אז $\gamma\subseteq\sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

תאור של טופולוגית המנה: $\sigma := \{O\subseteq Y \mid \; q^{-1}(O)\in\tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X.

שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע ?)

תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

נניח $q:X\to Y$ פונקצית מנה ונתונה פונקציה $f:Y\to Z$.

אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) ההרכבה $f\circ q:X\to Z$ רציפה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f\circ q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: נניח $f\circ q:X\to Z$ רציפה. צ"ל $f:Y\to Z$ רציפה.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z.

נתון ש $q:X\to Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X. אבל $q^{-1}(f^{-1}(O))=(f\circ q)^{-1}(O)$ ונתונה רציפות של $f\circ q:X\to Z$.

☺

תוצאה: נניח $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונקצית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q:X\to Y$.

ז"א אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אז $\gamma\subseteq\sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f: Y \to Z$ ניקח $id:(Y,\sigma)\to(Y,\gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q: X \to Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q: X \to Y$ היא פונקצית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ **פתוחה** ב X עבור $O \subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y.

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q **על** לכן $q(q^{-1}(O)) = O$ חייבת להיות פתוחה. הוכחה דומה אם יש סגירות ...

☺

תוצאה: כל הטלה $p_{i_0}: \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}$ היא פונקצית מנה (פתיחות).

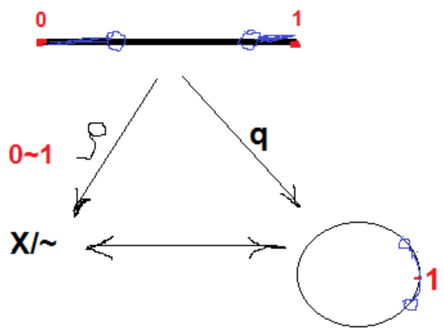
תוצאה: נניח $f: X \to Y$ רציפה, על $X \in Comp, Y \in T_2$. אז f פונקצית מנה (סגירות).

דוגמה: $f: X=[0,1] \to Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} \quad f(x) = cis(2\pi x)$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \to X/\sim \cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $id:(\mathbb{R},\tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $id^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R},\tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $\mathrm{id}:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1=\tau_2$.

דוגמה: $h(x)=\mathrm{cis}(2\pi x)$ $\quad h:X=[0,1)\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A:=\{z\in T\,|\,0\le\arg(z)<\frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A)=[0,\frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$

אבל A לא פתוח ב T.

דוגמה: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות $a\sim b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim=\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של $\mathbb{R}/\sim$?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a]=a+\mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב $\mathbb{R}$.

לכל מקור $q^{-1}(C)$ של תת קבוצה לא ריקה C ב $\mathbb{R}/\sim$ לגבי פונקציה טבעית

$$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$$

הקבוצה $q^{-1}(C)$ היא צפופה ב $\mathbb{R}$ (כי $q^{-1}(C)$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(C)$ סגור היא $q^{-1}(C)=\mathbb{R}$. אבל אז $C=qq^{-1}(C)=q(\mathbb{R})=\mathbb{R}/\sim$ (קחו בחשבון ש $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ על). לכן ב $\mathbb{R}/\sim=\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ עם טופולוגית מנה σ יש רק קבוצה אחת סגורה לא ריקה (שהיא $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$).

שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (**הומיאומורפיזם ומנה**)

נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $f:X\to Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ מתקיים תמיד $U\subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם $U=f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

לפי הגדרת טופולוגית מנה קבוצה $O:=f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y.

הוכחנו ש f פתוח.

☺

משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $f_1 : X \to Y$ $f_2 : Y \to Z$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ היא פונקצית מנה אז גם $f_2 : Y \to Z$ פונקצית מנה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2 \circ f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \to Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y. לפי הרציפות של $f_1 : X \to Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X. ברור $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$. אבל נתון ש $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \to Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_X : X \to Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \to Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט תנאי מספיק "צמצום" באופן הבא כאשר $i : X \to Y$ שיכון טבעי

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_X"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

☺

הגדרה: נניח $f : X \to Y$ ונתון יחס שקילות $\sim$ ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \to Y$

א. **מכבדת** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

ב. **מגדירה** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

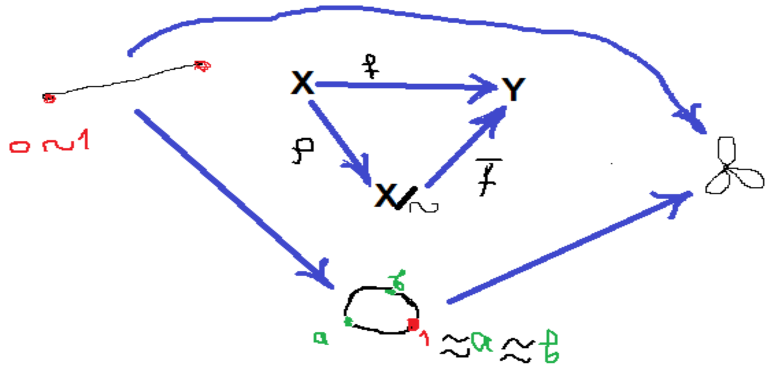
תכונות:

1. $f : X \to Y$ **מכבדת** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$\bar{f}([x]) = \bar{f}(\rho(x)) = f(x)$ $\quad \bar{f} : X/\sim\ \to Y \quad$ (ז"א $f = \bar{f} \circ \rho$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\ & X/\sim \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

הערה: פירוש אינטויטיבי -- יתכן ו $f : X \to Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות $\sim$



למשל

מוסכמה: בהמשך על $X/\sim$ ניקח טופולוגית מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f : X \to Y$ רציפה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim\ \to Y$ רציפה.

הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

אם $f : X \to Y$ רציפה אז גם $\bar{f} : X/\sim\ \to Y$.

3. $f : X \to Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim\ \to Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

אם $f : X \to Y$ מנה אז גם $\bar{f} : X/\sim\ \to Y$.

4. $\mathrm{f}:X\to Y$ **מגדירה** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\overline{f}:X/\sim\to Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $\mathrm{f}:X\to Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב $X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר ע"י $\mathrm{f}:X\to Y$ (ז"א $a\sim_f b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\overline{f}:X/\sim_f\to Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב $\Leftarrow$ א

$\mathrm{f}=\overline{\mathrm{f}}\circ\rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho:X\to X/\sim_f$ פונקצית מנה (בחרנו $X/\sim_f$ בטופולוגית מנה) ו $\overline{f}$ הומיאומורפיזם.

א $\Leftarrow$ ב

נתון $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\overline{f}:X/\sim_f\to Y$ גם מנה.

אבל $\overline{f}:X/\sim_f\to Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "**הומיאומורפיזם ומנה**" נקבל ש $\overline{f}:X/\sim_f\to Y$ הומיאומורפיזם.

☺

הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיואומופיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}\quad \mathrm{f(x)=(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x))}$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$\mathrm{f}:X\to T$ מגדירה את היחס $0\sim 1$.

לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם $\overline{f}:[0,1]/\sim_f\to T$.

לכן $T \cong {}_f\sim /[0,1]$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=\{x+\mathbb{Z}\mid x\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $\mathrm{i}:[0,1]\to\mathbb{R}$.

(דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנה אם ניקח בחשבון שיחס שקילות

$\sim_f$ כאן בדיוק נותן יחס הבא $a\sim_f b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\equiv b \bmod \mathbb{Z}$.

הערה: מחלקת שקילות של $a\in\mathbb{R}$ הוא $[a]=a+\mathbb{Z}$.

ז"א תאור אחר של היחס הוא $\forall n\in\mathbb{Z}\quad a\sim_f a+n$.

תרגיל: (הצגת טורוס דו-ממדי) הוכיחו $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$

($\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2=\{(x,y)+\mathbb{Z}^2\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(\mathrm{x},\mathrm{y})=(cis2\pi x,cis2\pi y)\quad f:\mathbb{R}^2\to T^2$.

צמצום הפונקציה $f:[0,1]^2\to T^2$ פונקצית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f:\mathbb{R}^2\to T^2$ מנה.

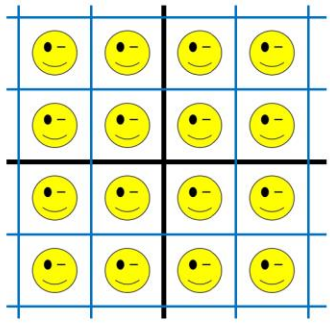
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2/\sim_f\cong T^2$.

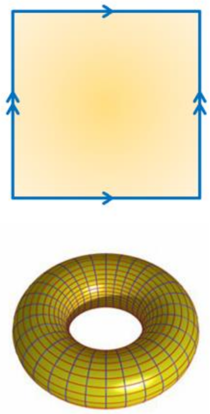
כאן יחס שקילות מתאימה היא $\forall n,m\in\mathbb{Z}\quad (a,b)\sim_f(a+n,b+m)$ המחלקות

הן $\{(x,y)+\mathbb{Z}^2\mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim_f$ כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.





מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

תרגיל:במעגל יחידה $T=\{z\in\mathbb{C}:||z||=1\}$ במישור המרוכב נגדיריחס שקילות $v\sim -v$.
הוכיחו שמרחב מנה $T/\sim$ הוא הומיאומורפי למעגל עצמו T.

פתרון: $\mathrm{f}:\mathrm{T}\to\mathrm{T},\mathrm{f}(\mathrm{v})=\mathrm{v}^2$ היא פונקצית מנה (מדוע ?).

היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v\sim -v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית

חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2=\{\mathrm{e},\sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2\times T\to T \quad (\sigma,v)\mapsto\sigma(v)=-v$$

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה לא תורשתית. ז"א יתכן ש $\mathrm{f}:X\to Y$ העתקת מנה $\mathrm{A}\subseteq X$.
ופונקצית על שמושרית $\mathrm{f}_A:\mathrm{A}\to f(\mathrm{A})$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A=[0,1)\subset X=[0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מנה אבל הצמצום

$p_1:X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=1\}\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ לא מנה

כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X

אבל $\{0\}$ לא פתוח ב $\mathbb{R}$.

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:

א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).

ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור !

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה א: נניח $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \quad x\geq 0 \vee y=0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x,y)=x$ $f:X\to\mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

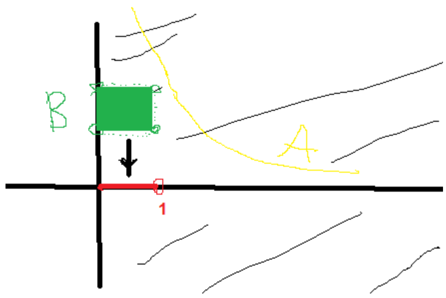
אז f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: צמצום על ציר X מגדיר הומיאומופיזם (בעצם הפונקציה המקורית היא רטרקציה).

לכן $f:X\to\mathbb{R}$ מנה לפי משפט הצמצום.

f לא פתוחה: $\mathrm{B}:=[0,1)\times(2,3)$ פתוחה ב X. אבל $\mathrm{f(B)}=[0,1)$ לא פתוחה ב $\mathbb{R}$.

f לא סגורה: $\mathrm{A}:=\{(x,\frac{1}{x}):x>0\}$ סגורה ב X. אבל $\mathrm{f(A)}=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.



דוגמה ב: עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 1\leq x\end{cases}$, $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$

טופולוגית מנה על $Y=\{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma=\{\varnothing,\{0\},\{0,1\}\}$.

$\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1.

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

למשל בדוגמה הקודמת ב או בדוגמה של $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.