הוצאת כדורים ממוספרים מכד, כאשר אין חשיבות לסדר <u>ויש חזרה</u>. $\equiv$ מגלגלים קובייה עם n צלעות k פעמים. רושמים את מספר הפעמים שהתקבלה כל תוצאה.

התוצאה של סדרת ניסויים / הטלת קובייה / הוצאת כדורים:

לכל $1 \leq i \leq n$, $x_i =$ מספר הפעמים שהתקבל הערך i, $x_i \geq 0$. $\sum x_i = k$

התוצאה מקודדת לקטור מגודל n מהצורה $(x_1, \cdots, x_n)$.

למדנו שיש התאמה בין $\{(x_1, \cdots, x_n) |\ x_i \geq 0, \sum x_i = k\}$

לבין{ וקטורים באורך $n + k - 1$ שבכל רכיב כתוב "x" או "|", ובדיוק k x-ים }.

לכן מספר האפשרויות הוא $\binom{n+k-1}{k}$.

דוגמה

$$n = 6, k = 3$$

$$(0,0,2,1,0,0) \leftarrow 3\ 3\ 4 \text{ או } 3\ 4\ 3 \text{ או } 4\ 3\ 3 \longleftarrow ||xx|x||$$

דוגמה

שאלה: כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + \cdots + x_{10} = 64$ כאשר $x_i \geq i$.

(אם הדרישה הייתה $x_i \geq 0$ היו $\frac{73!}{9!\cdot 64!} = \binom{64+10-1}{64}$ פתרונות למשוואה)

פתרון: נכתוב $x_i = i + y_i$. צריך לספור פתרונות למשוואה $\sum y_i = 9 \Leftrightarrow \sum(y_i + i) = 64$ כאשר $y_i \geq 0$. מספר הפתרונות הוא $\frac{18!}{(9!)^2} = \binom{18}{9}$.

ספירת חלוקות

מוטיבציה:

כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + \cdots + x_{10} = 64$ כאשר $0 \le x_i \le 8$.

לבחור תת קבוצה (בגודל מסוים) שקול לבחירת חלוקה לשתי תתי קבוצות: $A \cup A^c$.

הכללה:

אפשר לחלק לכמה תת קבוצות:

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

שאלה

נתונה X בגודל n. כמה דרכים יש לחלק את הקבוצה ל – k תתי קבוצות A_i כך ש - $|A_i| = n_i$.

($\sum n_i = n$) אפשר לסדר את אברי הקבוצה ולחלק באופן רציף:

$$(- - - -)_{A_1}(- -)_{A_2}(- - -)_{A_3}$$

כדי לספור נגדיר פונקציה:

(חלוקות) → ($n!$ תמורות)

לכן מעקרון המנה מספר החלוקות האפשריות שווה ל – $\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ (נקרא "המקדם המולטינומי").

אפשר להוכיח זאת גם באמצעות אינדוקציה לגבי הטענה:

$$\binom{n}{n_1 \cdots n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2 \cdots n_k}$$

את המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$, כותבים בשפת המקדם המולטינומי $\binom{n}{k(n-k)}$.

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \Rightarrow \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$$

$$(x+y+z)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n, 0 \le n_{1,2,3}} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} \Rightarrow \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} = 3^n$$

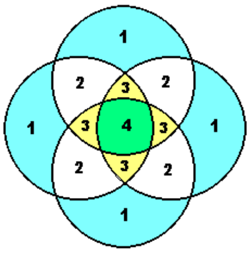
נוסחת ההכלה וההדחה

נוסחה:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |C \cap D| +$
$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$



נוסחה כללית:

לכל $A_1, \cdots, A_m$ (קבוצות סופיות),

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right|}$$

לדוגמה,

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_5| = \boxed{k=1} - \boxed{k=2} + \underbrace{\boxed{|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots}}_{\binom{5}{3} \text{ איברים}} - \boxed{k=4} + \boxed{k=5}$$

ניסוח אחר:

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{\phi \neq I \subseteq \{1, \cdots m\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|}$$

נגדיר:

$$\bigcap_{i \in \phi} A_i = \bigcup A_i$$

נוסחה שקולה

$$\boxed{\boxed{\sum_{I \subseteq \{1, \cdots m\}} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = 0}}$$

הוכחה

נבחר נקודה $x \in \bigcup A_i$. נסמן $I_x = \{i | x \in A_i\} \neq \phi$

$$I \subseteq I_x \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i$$

באגף שמאל x משתתף בסיכום אך ורק ברכיבים I שעבורם $I \subseteq I_x$ כלומר x נספר $\sum_{I \subseteq I_x} (-1)^{|I|} = 0$ פעמים.

$$\sum_{I \subseteq I_x} (-1)^{|I|} = \sum_{j=0}^{|I_x|} \left(\sum_{\substack{I \subseteq I_x \\ |I|=k}} (-1)^{|I|} \right) = \sum_{k=0}^{|I_x|} (-1)^k \cdot \binom{|I_x|}{k} \overset{\substack{\text{לפי נוסחת הבינום} \\ x=1, y=-1}}{=} (1-1)^{|I_x|} = 0$$

דוגמה

בבית הספר יש 3 חוגים: שחמט (A) ריצה (B), בישול (C).

ידוע ש-: $|A| = 31$ משתפפים בשחמט, $|B| = 19$, $|A \cap B| = 4$, $|A \cap C| = 7$

עדוגמה

זורקים $20^{=n}$ כדורים ממוספרים ל - 12 תאים ממוספרים, כמה דרכים יש לזרוק כנ"ל כך שכל התאים יהיו מלאים?

פתרון

נעבור למשלים. דרכים לזרוק את הכדורים כך שהתא ה i – יהיה ריק.

התשובה: $|(A \cup \cdots \cup A_{12})^c|$

הגדרה - סימטרי

גודל החיתוך $|\bigcap_{i \in I} A_i|$ תלוי רק ב - $|I|$

נוסחת ההכלה וההדחה למצב סימטרי:

$$\boxed{|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \cdot \binom{m}{k} |A_1 \cap \cdots \cap A_k|}$$

מהו גודל החיתוך?

$$\left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = (12-k)^{20}$$

בפרט, אנחנו במצב סימטרי.

לכן,

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{k=1}^{12} (-1)^{k-1} \cdot \binom{12}{k} (12-k)^{20}$$

לכן, $|(A \cup \cdots \cup A_{12})^c| = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k \cdot \binom{12}{k} \cdot k^{20}$.

■