תרגיל 4

10 באפריל 2018

פתרו את המד"רים הבאים:

1. $y' = \frac{1}{\sin y}$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin y}$$
$$\sin y dy = dx$$
$$\int \sin y dy = \int dx$$
$$-\cos y = x + c$$
$$y = \arccos(-x - c)$$

אין פתרונות סינגולריים.

2. $y' = 3y^2 \cos x$

פתרון:

פתרונות סינגולריים: $y(x) = 0$.

פתרון כללי: $\frac{dy}{dx} = 3y^2 \cos x$

$$\frac{dy}{3y^2} = \cos x dx$$
$$\int \frac{dy}{3y^2} = \int \cos x dx$$
$$\frac{-1}{3y} = \sin x + c$$
$$y = \frac{-1}{3\sin x + 3c}$$

3. $y' = \frac{x}{y}$

פתרון:

פתרונות סינגולריים: אין.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx$$
$$\int ydy = \int xdx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$
$$y^2 = x^2 + 2c$$

יש שני פתרונות כלליים, שכל אחד מהם נמצא בתחום אחר של המישור: $y = \sqrt{x^2+2c}$ נמצא בתחום $y > 0$. ו- $y = -\sqrt{x^2+2c}$ נמצא בתחום $y < 0$.

4. $(5x+1)dx - 2y^2xdy = 0$

פתרון:

זאת משוואה פרידה.

$$2y^2dy = (5 + \frac{1}{x})dx$$
$$\int 2y^2dy = \int (5 + \frac{1}{x})dx$$
$$\frac{2}{3}y^3 = 5x + \ln|x| + c$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{15x}{2} + \frac{3}{2}\ln|x| + \frac{3c}{2}}$$

המשווה שקולה למד"ר $y' = \frac{5x+1}{2y^2x}$, ואפשר לראות שאין לה פתרונות סינגולריים.

5. $dy + (xy + x)dx = 0$

פתרון:

המשוואה שקולה למד"ר

$$y' + xy = -x$$

זאת מד"ר לינארית שאנחנו כבר יודעים לפתור.

$$a(x) = x, b(x) = -x$$
$$A(x) = \frac{x^2}{2}$$

והפתרון הוא:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}(\int -xe^{\frac{x^2}{2}}dx + c) = e^{-\frac{x^2}{2}}(-e^{\frac{x^2}{2}} + c) = -1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$