פתרונות

21 ביולי 2010

.1

(א) המיקומים הם:

$$\vec{r}_1 = L_1(\sin\theta_1, -\cos\theta_1)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + L_2(\sin\theta_2, -\cos\theta_2)$$

(ב)

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^2}{2} - m_1 g y - m_2 g y_2 = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^2}{2} + L_1(m_1+m_2)\cos\theta_1 + m_2 L_2\cos\theta_2$$

נציב את הנגזרות של הביטויים מא' ונקבל

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1+m_2)L_1^2\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_2 L_2^2\dot{\theta}_2^2}{2} + \frac{2m_2 L_1 L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{2} + L_1(m_1+m_2)\cos\theta_1 + m_2 L_2\cos\theta_2$$

(ג) גוזרים לפי אוילר־לגרנז' ומקבלים:

$$(m_1+m_2)L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) = -g(m_1 L_1 + m_2 L_2)\sin\theta_1 - m_2 L_1 L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$m_2 L_2\ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 L_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) = -g m_2 L_2\sin\theta_2 + m_2 L_1 L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

(ד) אחרי הלינאריזציה (זריקת האיברים הלא־לינארים) נקבל את המערכת:

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)L_1^2 & m_2 L_1 L_2 \\ m_2 L_1 L_2 & m_2 L_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -g\begin{pmatrix} m_1 L_1 + m_2 L_2 & 0 \\ 0 & m_2 L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

לשם הפשטות נכפיל בהפכי של המטריצה הימנית ונקבל

$$-\frac{1}{g}\begin{pmatrix} \frac{(m_1+m_2)L_1^2}{m_1 L_1 + m_2 L_2} & \frac{m_2 L_1 L_2}{m_1 L_1 + m_2 L_2} \\ \frac{m_2 L_1 L_2}{m_2 L_2} & \frac{m_2 L_2^2}{m_2 L_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים של מטריצה זו הם

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2g}\left[\frac{(m_1+m_2)L_1^2}{m_1L_1+m_2L_2}+L_2\pm\sqrt{4L_1\frac{m_2L_1L_2}{m_1L_1+m_2L_2}-\left(\frac{(m_1+m_2)L_1^2}{m_1L_1+m_2L_2}-L_2\right)^2}\right]$$

והתדירויות העצמיות הן $\omega_{1,2}=(-\lambda_{1,2})^{-1/2}$.

2. (א) $\mathcal{H}=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$

(ב) משוואת התנועה הן

$$\dot{r}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m},\ \dot{\theta}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2} \tag{1}$$

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r}=-\frac{p_\theta^2}{mr^3}+\frac{GMm}{r^2},\ \dot{p}_\theta=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}=0 \tag{2}$$

(ג) הלגראנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות הינו $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}}$. תחת טרנספורמצית סבוב $\mathcal{L}$ יכתב ($(\mathcal{O}(\epsilon^2)$) כ

$$\mathcal{L}'=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\epsilon^2\dot{x}^2+\epsilon^2\dot{y}^2)+\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+\epsilon^2x^2+\epsilon^2y^2}}=$$
$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}}+\epsilon^2\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\epsilon^2\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathcal{L}+\mathcal{O}(\epsilon^2)$$

(ד) ע"פ משפט נתר ישנו גודל נשמר $Q=\sum_i K_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}=K_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}+K_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}=m\dot{x}y-m\dot{y}x$, כאשר $K_i=\frac{\partial q_i'}{\partial\epsilon}$. שמורה זו היא התנע הזויתי.

3.

$$\psi(x)=cx(1-x),\quad 0\le x\le 1$$

(א) תנאי הנרמול (נניח ללא הגבלת כלליות שc ממשי חיובי):

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x=c^2\int_0^1 x^2(1-x)^2\mathrm{d}x=c^2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)_0^1=\frac{c^2}{30}$$

לכן, $c=\sqrt{30}$ (כפול כל פאזה מרוכבת).

(ב) $\int_0^{\frac{1}{2}}\psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (ניתן להסיק מייד משיקולי סימטריה).

(ג)

$$\begin{aligned}
a_k\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x &= \sqrt{60}\int_0^1 x(1-x)\sin k\pi x\mathrm{d}x\\
&= \sqrt{60}\left[\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^2}-\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}-\frac{2x}{(k\pi)^2}\sin k\pi x-\left(\frac{2}{(k\pi)^3}-\frac{x^2}{k\pi}\right)\cos k\pi x\right]_0^1\\
&= \sqrt{60}\left[-\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}-\left(\frac{2}{(k\pi)^3}-\frac{1}{k\pi}\right)(-1)^{k-1}-\frac{2}{(k\pi)^3}\right]\\
&= \sqrt{60}\frac{2}{(k\pi)^3}\left[(-1)^k-1\right]
\end{aligned}$$

לכן, $P(k)=|a_k|^2=\frac{240}{(k\pi)^6}\left[(-1)^k-1\right]^2$. קל לראות (וגם ברור מהסימטריה) שעבור k זוגי $P(k)=0$.

(ד) האנרגיה היא $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$. הפתרון הכללי הוא, לכן,

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\phi_k(x)e^{i\frac{E}{\hbar}t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{480}}{(k\pi)^3}\left[(-1)^k-1\right]e^{i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\sin k\pi x$$

4. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(|l=1,m=0\rangle+2\,|l=2,m=2\rangle\right)$

(א) ההסתברויות של $l(l+1)=2$ היא $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$ ושל $l(l+1)=6$ היא $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$ (האמפליטודות בריבוע). המצב $l(l+1)=4$ בלתי אפשרי פיסיקלית (לא רק במקרה זה).

(ב) מקבלים:

$$\begin{aligned}\left(L^2-L_z^2\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\left(|l=1,m=0\rangle+2\,|l=2,m=2\rangle\right) &=\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1\cdot2-0^2\right)|l=1,m=0\rangle+2\left(2\cdot3-2^2\right)|l=2,m=2\rangle\right) &=\\ 2\frac{1}{\sqrt{5}}\left(|l=1,m=0\rangle+2\,|l=2,m=2\rangle\right)\end{aligned}$$

כלומר, זהו מצב עצמי, עם ערך עצמי 2, ולכן נקבל בוודאות במדידה 2.

(ג) בהסתברות $1/5$ מקבלים $m=0$ ובהסתברות $4/5$ מקבלים $m=2$. לכן $\langle m\rangle=\mathbb{E}(m)=\frac{8}{5}$.

5. ישנן דרכים שונות לפתור. נשים לב כי $\beta=0.8$ וכן $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{0.6}=\frac{5}{3}$.

(א) דרך א' (מנקודת הראות של מערכת כדוה"א): בזמן $T=2$ נשלח אות. האות נע במהירות האור ($c=1$), ולכן ישיג את החללית בזמן $\beta T=T-2$ כלומר, $T=10$. הזמן שעבר אז מנקודת הראות של החללית הוא $T'=\frac{T}{\gamma}=6$.

(ב) דרך ב' (מערכת החללית). האות נשלח בזמן $T=2$ מנקודת הראות של כדוה"א שלפי שעון החללית הוא $T=\gamma T'=\frac{10}{3}$. מרחק כדוה"א בזמן זה הוא $x=\beta T=0.8\cdot\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$. האות נע במהירות האור ולכן ייקח לו זמן $\frac{8}{3}$ להגיע, ולכן הזמן הכולל הוא $\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=6$.