1. גיאומטריה אנליטית

1.1 ספירה, גיאומטריה פרויקטיבית

ספירה מסומנת $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, מוגדרת $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1\right\}$

הגדרה: מעגל ראשי על הספירה הוא חיתוך בינה לבין מישור העובר דרך ראשית הצירים.

מישור פרויקטיבי ממשי: $\mathbb{R}P^2 = {}^{S^2}/_{\{\pm \mathrm{Id}\}}$

1.2 מעגל, אי שוויון איזופרימטרי

מעגל(במישור) מסומן $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, מוגדר $S^1 = \left\{(x,y) \middle| x^2+y^2 = 1\right\}$. זוהי עקומה במישור - סוג של עקומת ג'ורדן

הגדרה: עקומת ג'ורדן היא עקומה במישור שלא חותכת את עצמה והיא סגורה(כלומר מתסיימת בנקודת ההתחלה שלה).

אי שוויון איזופרימטרי

אם לוקחים עקומת ג'ורדן, יש לה שתי תכונות L(אורך המסילה) וA(השטח בפנים) שלא משתנות כשמזיזים אותה. אי השוויון האיזופרימטרי אומר ש:

- $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 - \frac{A}{\pi} \geq 0$
- במקרה של שוויון - בהכרח מעגל

1.3 תורת היחסות של Einstein

כדי לפתח את תורת היחסות שלו, איינשטיין היה צריך לפתח את הגיאומרטריה הדיפרנציאלית, בעיקר את מושג העקמומיות.

1.4 אלגברה לינארית, סימון האינדקסים(index notation)

במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^n$, ניקח שני וקטורים $v, w \in \mathbb{R}^n$(וקטורי עמודה)
תהי B מטריצה $m \times n$

מטריצה בתור תבנית בי־לינארית

$$B : \underset{(v,w)\mapsto B(v,w)}{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$$

$$B\left(v, w\right) = v^t B w$$

באופן יותר מפורט: נניח $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=1,...n \\ j=1,...n}}$.

אם $n = 2$:

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

(הקואורדינטות של הווקטורים למעלה - זה סימון שאיינשטיין פיתח)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$Bw = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w^1 + b_{12}w^2 \\ b_{21}w^1 + b_{ww}w^2 \end{bmatrix}$$

$$v^t = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix}$$

$$v^t B w = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}w^1 + b_{12}w^2 \\ b_{21}w^1 + b_{ww}w^2 \end{bmatrix} = b_{11}v^1w^1 + b_{12}v^1w^2 + b_{21}v^2w^1 + b_{22}v^2w^2$$

נקצר באמצעות כתיב סיגמה:

$$v^t B w = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} b_{ij} v^i w^j$$

איינשטיין קיצר והשמיט את הסיגמות:

$$v^t B w = \cancel{\sum_{i=1}^{n}} \cancel{\sum_{j=1}^{n}} b_{ij} v^i w^j = b_{ij} v^i w^j \in \mathbb{R}$$

ההסכמה מאז אינשטיין היא שאם רואים כזה ביטוי, שבו יש אינדקסים גם למעלה וגם למטה, הוא סכום ולא איבר בודד.

1.5 סימון של Einstein

$$B\left(v,w\right)=b_{ij}v^{i}w^{j}$$

נניח B מטריצה סימטרית $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$(כלומר $b_{21}=b_{12}$).

$\boxed{B^{t}=B}$ - ההגדרה של מטריצה סימטרית.

תהי B מטריצה סימטרית. היא מגדירה תבנית בילינארית $B\left(v,w\right):\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$.

הגדרה: תבנית ריבועית המתאימה Q היא התבנית $Q\left(v\right)=B\left(v,v\right)=b_{ij}v^{i}v^{j}$

נוסחת פולריזציה

הנוסחה מראה איך אפשר לבנות את B חזרה מתוך Q:

$$\boxed{B\left(v,w\right)=\frac{1}{4}\left(Q\left(v+w\right)-Q\left(v-w\right)\right)}$$

1.6 מטריצה בתור העתקה לינארית

$$B:\mathbb{R}^{n}\underset{v\mapsto Bv}{\to}\mathbb{R}^{n}$$

מסמנים מקדמים של B ע"י $B=\left(b^{i}{}_{j}\right)$ - זה נקרא staggering indices - השורה נמצאת למעלה, והעמודה נמצאת למטה בהזחה(יש ריבוע ריק מתחת למספר השורה).

עכשיו אפשר לכתוב:

$$B:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$$

$$w=Bv$$

$$v=\left(v^{j}\right)_{j=1,\ldots n}$$

$$w=\left(w^{i}\right)_{i=1,\ldots n}$$

$$B = \left(b^i{}_j\right)$$

$$\boxed{w^i = \sum_{j=1}^{n} b^i{}_j v^j}$$

$$\boxed{w^i = b^i{}_j v^j}$$

עם חיבור על אינדקס j

הערה

עקבה $\mathrm{Tr}\,(B)$ של מטריצה B היא

$$\mathrm{Tr}\,(B) = b^1{}_1 + b^2{}_2 + ... + b^n{}_n = \sum_{i=1}^{n} b^i{}_j$$

$$\mathrm{Tr}\,(B) = b^i{}_j$$

1.7 סימטריזציה ואנטי סימטריזציה

נחזור לסימונים $B = (b_{ij})$(כלומר של תבנית בי־לינארית).
סימטריזציה S של B היא מטריצה

$$S = \frac{1}{2}\left(B + B^t\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(b_{ij} + b_{ji})$$

אנטי־סימטריזציה A של B היא מטריצה

$$A = \frac{1}{2}\left(B - B^t\right) = \left(\frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})\right)$$

לכן

$$B = S + A$$

סימונים נוספים

$$b_{[ij]} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji})$$

$$b_{\{i,j\}} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$$

אם $B = (b_{ij})$:

$$B = S + A$$

$$S = (s_{ij})$$

$$A = (a_{ij})$$

אזי

$$s_{ij} = b_{\{ij\}}$$

$$a_{ij} = b_{[ij]}$$

למה

מטריצה B היא סימטרית אם ורק אם לכל i, j מתקיים $b_{[ij]} = 0$

הוכחה

$$b_{[ij]} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}) = 0$$

1.8 כפל מטריצי בסימונים אינדקסיים

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ מטריצות שרירותיות המקיימות $\boxed{C = AB}$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

כפל של סקלרים הוא קומוטטיבי, ולכן ניתן לכתוב את הנוסחה גם בתור

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik}}$$

עכשיו ניתן לכתוב

$$\boxed{c_{[ij]} = \sum_{k=1}^{n} b_{k[j} a_{i]k}}$$

(הסוגריים המרובעות נפתחות באינדקס התחתון של b, ונסגרות באינדקס התחתון של a.

$$b_{k[j} a_{i]k} = \frac{1}{2} \left(b_{ki} a_{ik} - b_{ki} a_{jk} \right)$$

הרכבה

אם מסתכלים על מטריצות בתור העתקות, ניתן לבצע הרכבה:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$C = AB$$

$$C = \left(c^{i}{}_{j} \right), B = \left(b^{i}{}_{j} \right), A = \left(a^{i}{}_{j} \right)$$

בסימון אינשטיין ניתן לכתוב

$$a^{i}{}_{j} = a^{i}{}_{k} b^{k}{}_{j}$$

1.9 מטריצה הופכית, פונקציית דלטה של Kronecker

$B = (b_{ij})$, אזי מטריצה הופכית היא B^{-1} כך ש

$$BB^{-1} = \mathrm{Id}_n$$

$$B^{-1}B = \mathrm{Id}_n$$

$$\mathrm{Id}_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

הגדרה

$$B^{-1} = \left(b^{ij}\right)$$

דוגמה

$$n = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det B = ad - bc$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{bmatrix}$$

$$b^{11} = \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}$$

פונקציית דלטה

$$I = \mathrm{Id} = \left(\delta^i{}_j\right) \quad \begin{matrix} i = 1, ...n \\ j = 1, ...n \end{matrix}$$

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$B^{-1}B = \mathrm{Id}$$

$$b^{ik}b_{kj} = \delta^i{}_j$$

$$BI = B$$

$$b^i_k\delta^k{}_j = b^i{}_j$$

מכפלה וקטורית ב$\mathbb{R}^3$

$$v \cdot w = \sum_{i=0}^{3} v^i w^i$$

$$v \times w = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

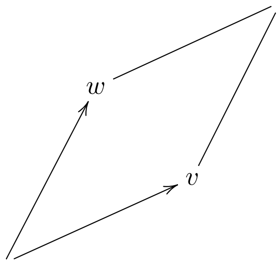
$$i = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{pmatrix} v^1 & v^3 \\ w^1 & w^3 \end{pmatrix} \vec{e}_2 + \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{pmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= \left(v^2w^3 - v^3w^2\right)\vec{e}_1 - \left(v^1w^3 - v^3w^1\right)\vec{e}_2 + \left(v^1w^2 - v^2w^1\right)\vec{e}_3$$

משפט

$v \times w$ הוא מאונך גם לv וגם לw, באורך $|v \times w|$ שווה לשטח של המקבילית



ומקיים כלל של יד ימין.
$(v_1, v_2, v \times w)$ - בסיס "ישר"

$$v \times w = -\left(w \times v\right)$$

$$\boxed{a \times \left(b \times c\right) = \left(a \cdot c\right) b - \left(a \cdot b\right) c}$$

1.10 ערכים עצמיים, סימטריה

בדרך כלל, למטריצה ממשית יכול לא להיות שום ערך עצמי ממשי, למשל $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ - זוהי מטריצה שמסובבת ב90 מעלות - ולכן אף ווקטור לא ישאר באותו כיוון אחרי כפל במטריצה הזו.

הגדרה

$\lambda \in \mathbb{R}$ הוא ערך עצמי של B אם $\det\left(B - \lambda I\right) = 0$.

משפט

אם λ הוא ערך עצמי של B, אזי קיים ווקטור $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ המקיים $Bv = \lambda v$.

הגדרה $v \neq 0$ כזה נקרא וקטור עצמי שייך לλ.

מכפלה סקלרית ב$\mathbb{R}^n$

$$\langle v, w\rangle = v'w' + ... + v^n w^n = \sum_{i=0}^{n} v^i w^i$$

למה

מתקיים $\langle v,w\rangle = v^t w$

משפט

לכל מטריצות A,B,

$$(AB)^t = B^t A^t$$

משפט

מטריצה ממשית B היא סימטרית אם ורק אם מתקיים לכל וקטורים $v,w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Bv,w\rangle = \langle v,Bw\rangle$$

הוכחה

$$\langle v,w\rangle = v^t, w$$

תהי B מטריצה סימטרית $B = B^t$. נחשב:

$$\langle Bv,w\rangle = (Bv)^t w = \left(v^t B^t\right) w = v^t \left(B^t w\right) = \left\langle v, B^t w\right\rangle = \langle v, Bw\rangle$$

1.11 ערך עצמי של מטריצה סימטרית

משפט

לכל מטריצה ממשית סימטרית יש ערך עצמי ממשי.

הוכחה

נסמן $M_{n,n}(\mathbb{R})$ אוסף של כל המטריצות בגודל $n \times n$.

$B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ מגדירה העתקה לינארית $B_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

מצד שני, $R \subset \mathbb{C} \Leftarrow M_{n,n}(\mathbb{R}) \subset M_{n,n}(\mathbb{C})$ $B \in$, ולכן ניתן לראות את המטריצה גם בתור העתקה על השדה $\mathbb{C}$: $B_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

הפולינום האופייני שלה הוא בדרגה n

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$$

משפט יסודי של אלגברה לכל פולינום(לא קבוע) מעל $\mathbb{C}$ יש שורש ב$\mathbb{C}$.
קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש$P_B(\lambda) = 0$, לכן λ הוא ערך עצמי של B.

מכפלה הרמיטית $\mathbb{C}^n$, מכפלה הרמיטית(Hermitian) ב$\mathbb{C}$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{v}^j w^j$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle \qquad \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

קיים $v \in \mathbb{C}^n$ כאשר $Bv = \lambda v$. נחשב:

$$\langle Bv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$$\langle Bv, v \rangle = \langle v, Bv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$$

$$\bar{\lambda} \|v\|^2 = \lambda \|v\|^2$$

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

לכן $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.12 מרחב מכפלה פנימית, אופרטורים צמודים לעצמם(self-adjoint)

הגדרה

יהי V מרחב עם מכפלה פנימית ממשי. אנדומורפיזם $B : V \to V$ נקרא צמוד לעצמו אם לכל $v, w \in V$ מתקיים

$$\langle Bv, w \rangle = \langle v, Bw \rangle$$

מסקנה

לכל אופרטור צמוד לעצמו יש וקטור עצמי ממשי.