גאומטריה דיפרנציאלית

אתר הקורס: http://www.math-wiki.com/index.php?title=88-201_%D7%AA%D7%A9%D7%A2%D7%92_%D7%A1%D7%9E%D7%A1%D7%98%D7%A8_%D7%91

מתרגל: מיכאל טויטו

דוא"ל: mtwito101@gmail.com

מטרת הקורס

להשתמש בכליפ של אינפי(נגזרת ואינטגרל) בכדי לחקור אובייקטים גיאומטריים, כגון עקומות ומשטחים.

ככל הנראה לא נהיה קפדניים במיוחד בהוכחות.

תזכורת

עקום ז'ורדן ב$\mathbb{R}^2$ הוא עקום סגור שאינו חותך על עצמו(חוץ בנקודת החיבור)

משפט ז'ורדן קובע שכל עקום ז'ורדן מחלק את המישור לשתי קבוצות - פנים וחוץ.

משפט אי השוויון האיזופרימטרי

יהי עקום ז'ורדן ב$\mathbb{R}^2$, בעל אורך L, הכולא שטח A, אזי

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 - \frac{A}{\pi} \geq 0$$

שקול:

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

שוויון מתקיים אם"ם העקום הוא מעגל.

נגדיר את המנה האיזופרימטרית:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2}$$

אי השוויון אומר $Q \leq 1$, ויש שוויון אם"ם מדובר במעגל.

תרגיל

חשבו את המנה האיזופרימטרית עבור מלבן צר וארוך. כלומר מלבן עם צלעות $h, \frac{1}{h}$.

פתרון

$$A = h \cdot \frac{1}{h} = 1 \qquad L = 2h + 2 \cdot \frac{1}{h}$$

$$Q = \frac{4\pi \cdot 1}{\left(2h + 2\frac{1}{h}\right)^2} = \frac{4\pi}{4h^2 + 8 + \frac{4}{h^2}} = \frac{4\pi h^2}{4h^4 + 8h^2 + 4}$$

אם נשאיף את h ל0 נקבל

$$\frac{4\pi^2}{4\pi^4 + 8h^2 + 4} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

מסקנה

Q יכול להיות קטן ככל שנרצה.

סימוני איינשטיין

וקטורים

וקטור ב$\mathbb{R}^n$ מוצג כצירוף לינארי של וקטורי בסיס. את וקטורי הבסיס נסמן עם אינדקס תחתון: $e_1, e_2, \dots e_n$. את הקואורדינטות של וקטור v נסמן עם אינדקס עליון[1]:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^n e_n$$

פונקציונאלים

עבור פונקציונאלים $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ההפך נכון: לוקטורי הבסיס ניתן אינדקס עליון $e^1, e^2, \dots e^n$ ולקואורדינטות אינדקס תחתון:

$$f = f_1 e^1 + f_2 e^2 + \cdots + f_n e^n$$

פונקציונאלים נקראים גם קו־וקטורים.

[1] נראה כמו חזקה - אבל זה לא חזקה!

סימון איינשטיין

אם בביטוי מופיע אותו האינדקס גם למעלה וגם למטה. יש לסכום על כל הערכים של אינדקס זה.

בקצרה: משמיטים את ה$\sum$

לדוגמה

אם $v \in \mathbb{R}^3$, נחליף את הרישום

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i = v^i e_i$$

ברור שi רץ בין 1 ל3 כי מדובר במרחב תלת מימדי.

סימון איינשטיין עוזר לרשום נוסחאות מסובכות יותר בקצרה:

מטריצות

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תסומן ${A^i}_j$ או ${a^i}_j$.

i הוא אינדקס השורה והוא למעלה (בד"כ)

j הוא אינדקס העמודה והוא למטה (בד"כ)

בניגוד לאלגברה לינארית, שם רשמנו A_{ij} או a_{ij}.

הצדקה

אם $\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{u} = \underset{n\times 1}{v}$ מהי הנוסחה לרכיבי v?

$$\begin{pmatrix} {A^1}_1 & {A^1}_2 & \cdots & {A^1}_n \\ {A^2}_1 & {A^2}_2 & \cdots & {A^2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A^i}_1 & {A^i}_2 & \cdots & {A^i}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A^i}_1 & {A^i}_2 & \cdots & {A^i}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^i \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^i \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

$$v^i = {A^i}_1 u^1 + {A^i}_2 u^2 + \cdots + {A^i}_n u^n = \xcancel{\sum_j} {A^i}_j u^j = {A^i}_j u^j$$

תזכורת

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

תרגיל

יהי $\{e_i\}_{i=1}^3$ בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{R}^3$ ויהיו $\begin{matrix} u = u^i \\ v = v^i \end{matrix}$ וקטורים. מצא נוסחה למכפלה הסקלרית $u \cdot v$.

פתרון

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 = \sum_{i=1}^{3} u^i v^i \neq \begin{matrix} u^i v_i \\ u_i v^i \end{matrix}$$

אי אפשר להוריד את אחד האינדקסים - כי u, v הם וקטורים, לא קו־וקטורים. לכן נשתמש בדלטה של קרונקר: $\delta_{ij} = \delta^i{}_j = \delta_j{}^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} u^i v^j = \textstyle\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} u^i v^j \quad &= \quad \delta_{11} u^1 v^1 + \cancel{\delta_{12} u^1 v^2} + \cancel{\delta_{13} u^1 v^3} \\ &+ \quad \cancel{\delta_{21} u^2 v^1} + \delta_{22} u^2 v^2 + \cancel{\delta_{23} u^2 v^3} \\ &+ \quad \cancel{\delta_{31} u^3 v^1} + \cancel{\delta_{32} u^3 v^2} + \delta_{33} u^3 v^3 \quad = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \end{aligned}$$

שאלה

למה $u \cdot v \neq \delta_{ij} u^i v^i$?

תשובה

אינדקס שלא סוכמים עליו נקרא אינדקס חופשי. בנוסחה למעלה j חופשי.

תרגיל

הוכיחו שפעולת כפל מטריצות היא אסוציאטיבית, כלומר $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, בעזרת סימוני איינשטיין.

הקדמה

אם $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, מיהו $(M \cdot N)^i{}_j$?

$$(M \cdot N)^i{}_j = R_i(M) \cdot C_j(N) = \sum_{k=1}^{n} M^i{}_k N^k{}_j = M^i{}_k N^k{}_j$$

i, j הם אינדקסים חופשיים כאן, וk אינדקס רץ.

פתרון התרגיל

נוכיח שוויון בכל רכיב(ij):

$$[A\cdot(B\cdot C)]^i{}_j = A^i{}_k\,(B\cdot C)^k{}_j = A^i{}_k\left(B^k{}_l C^l{}_j\right) = \left(A^i{}_k B^k{}_l\right)C^l{}_j = (AB)^i{}_l \cdot C^l{}_j = [(A\cdot B)\cdot C]^i{}_j$$

i,j הם אינדקסים חופשיים, וk,l אינדקסים רצים.

הערה

$A^i{}_k\left(B^k{}_l C^l{}_j\right) = \left(A^i{}_k B^k{}_l\right)C^l{}_j$ בגלל האסוציאטיביות ב$\mathbb{R}$.

וקטורים ב$\mathbb{R}^n$(אצלנו בד"כ $n=2,3$)

הגדרה

עבור $u,v\in\mathbb{R}^n$ מוגדרת המכפלה הסקלרית $u\cdot v$ ע"י

$$u\cdot v\equiv\langle u,v\rangle := u^1v^1+u^2v^2+\cdots+u^nv^n=\sum_{i=1}^{n}u^iv^i\in\mathbb{R}$$

נשים ♡: זה מספר! לא וקטור!

נוסחה גיאומטרית:

$$u\cdot v=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta$$

כאשר θ היא הזווית בין u לv.

תכונות

1. $u\cdot v=0 \iff u\perp v$
2. $u\cdot v=v\cdot u$ - סימטריות
3. $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$ - פילוג

דוגמה

נתונים $v=\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$.

$$u\cdot v=1\cdot4+3\cdot(-2)+(-5)\cdot(-1)=4-6+5=3$$

הגדרה

עבור $u,v\in\mathbb{R}^3$ מוגדרת המכפלה הוקטורים ע"י

$$u\times v=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\end{vmatrix}=\left(u^2v^3-u^3v^2\right)e_1+\left(u^3v^1-u^1v^3\right)e_2+\left(u^1v^2-u^2v^1\right)e_3\in\mathbb{R}^3$$

נשים $\heartsuit$: זה וקטור! לא מספר כמו קודם!

תכונות

1. שטח המקבילית הנתפשת ע"י u,v =$\|u\times v\|=\|u\|\cdot\|v\|\sin\theta$(כאשר θ הזוית בין u לב v)
2. $u\times v$ מאונך לב u וגם לב v. זה משאיר שתי אופציות. הכיוון נקבע ע"י כלל יד ימין:

כלל יד ימין

אם האצבע המורה ביד ימין היא בכיוון u והאמה היא בכיוון v, אזי האגודל מצביע בכיוון של $u\times v$.

לחלופין אפשר לסובב את האצבעות מu אל v

3. $u\times v=-\left(v\times u\right)$ - אנטי־סימטריות
4. $u\times\left(v+w\right)=u\times v+u\times w$
5. $a\times\left(b\times c\right)+b\times\left(c\times a\right)+c\times\left(a\times b\right)=0$ - זהות יעקובי

נוכיח את 5

נוכיח בעזרת חישוב מפורט:

$$a=a^i\qquad b=b^i\qquad c=c^i$$

$$b\times c=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=\left(b^2c^3-b^3c^2\right)e_1+\left(b^3c^1-b^1c^3\right)e_2+\left(b^1c^2-b^2c^1\right)e_3$$

$$a\times\left(b\times c\right)=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^2c^3-b^3c^2 & b^3c^1-b^1c^3 & b^1c^2-b^2c^1\end{vmatrix}$$

וממשיכים...