תרגיל כיתה 11 - המשך

הערה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו$T : V \to V$ העתקה לינארית.
אפשר להגדיר את V כמודול מעל $\mathbb{F}[x]$ על ידי הגדרת הכפל

$$f(x) \cdot v = f(T)(v)$$

שימו לב: $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. מה זאת אומרת $f(T)$? העתקה לינארית $V \to V$!

דוגמה: $f(x) = x^2 + 1 \Leftarrow f(T) = T \circ T - I$

דוגמה(עמוד 4)

יהי $V = \mathbb{R}^3$ - מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
V כמודול מעל $\mathbb{R}[x]$. ז"א יש להגדיר את הכפל בין איברים בV לאיברים ב$\mathbb{R}[x]$.
נתבונן בהעתקה $T : V \to V$ המוגדרת באמצעות המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -
לדוגמה $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
הכפל יוגדר באופן הבא: $f(x) \cdot v = f(T)v$.

דוגמה מספרית: $\left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(A^2 - 2A + 2I\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

נרצה להראות שV הוא מודול מעל $\mathbb{R}[x]/(t-1)(t^2-1)$.

* בשיעור שעבר ראינו שאם $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$ ו$I \lhd R$ אז M הוא מודול מעל R/I.

יש להראות ש$\left\langle (t-1)\left(t^2-1\right)\right\rangle \subseteq \operatorname{Ann}(V)$

$$f(t) = |tI - A|$$

על פי משפט קיילי המילטון $f(A) = 0$. אם $u \in V$ אזי

$$f(x) \cdot u = f(A)(u) = 0 \Rightarrow \langle f \rangle \subseteq \operatorname{Ann}(V)$$

אנחנו רוצים להוכיח ש$\langle f \rangle \subseteq \operatorname{Ann}(V)$ כאשר $f(t) = (t-1)\left(t^2-1\right)$. מה זאת אומרת להוכיח ש$\langle f \rangle \subseteq \operatorname{Ann}(V)$? אם $g \in \langle f \rangle$ אז $g \cdot u = 0$ לכל $u \in V$. אבל

$$g(t) \cdot u = g(A) \cdot u = 0$$

הערה

כדי להוכיח שI אידאל ראשי, יש להראות שקיים $a \in R$ כך ש$I = \langle a \rangle$.

תזכורת

נניח שU, V מרחבים וקטוריים כך ש$\dim U = \dim V$ וגם $U \subseteq V \Leftarrow U = V$.
במודולים זה לא בהכרח קורה.
נתובנן ב$\mathbb{Z}$ וב$2\mathbb{Z}$ כמודול מעל $\mathbb{Z}$. $\{1\}$ בסיס ל$\mathbb{Z}$ ו$\{2\}$ בסיס ל$2\mathbb{Z}$, אבל $2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$

R חוג ראשי.

משפט

1. תת מודול של R^n הוא חופשי מדרגה $n \geq$.
2. כל תת מודול של R^n הוא מהצורה $A \cdot R^n$ עבור $A \in M_n(R)$. לכן לכל תת מודול של R^n ניתן למצוא את הבסיס שלו ע"י דירוג המטריצה A.

דוגמה

1. מצאו בסיס לתת מודול של $\mathbb{Z}^3$ הנפרש ע"י

$$\{(1,0,-1),(2,-3,1),(4,-3,-1)\}$$

נדרג את המטריצה, ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן המודול נפרש ע"י $\{(1,0,-1),(0,-3,3)\}$. זה בסיס, כי $\sum r_i a_i = 0 \Leftarrow r_i = 0$.

2. $$M = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=0 \end{array} \right\} \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

משפט

כל מודול M נוצר סופית מעל R הוא מהצורה $M_A = {R^n}/{A \cdot R^n}$.

הסבר

ניתן להגדיר M $f: R^n \to M$ ואז $\ker f = A \cdot R^n$ כאשר $A = \left(a_{ij}\right)$ ו $\sum a_{ij}e_i$ פורשת את $\ker f$.

דוגמה

נניח ש $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{Z}$.

למה איזומורפי $M_A = {}^{\mathbb{Z}^2}/_{A \cdot \mathbb{Z}^2}$?

$$M_A = \left\{(a_1, a_2) + m \cdot \alpha \middle| \alpha \in \mathbb{Z}^2, a_i \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{(a_1, a_2) \pmod m | a_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$$

הגדרה

יהיו $A, B \in M_n(R)$.

$A \sim B$ אם קיים P, Q הפיכים כך ש$B = P \cdot A \cdot Q$

טענה

$$M_A = {}^{R^n}/_{A \cdot R^n}$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A_A \cong M_B$$

תזכורת

ע"י כפל מטריצות ניתן להביא כל מטריצה למטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ כך ש $d_1 |$ $d_2 | \cdots | d_n$, וזוהי מטריצה סדורה קנונית.

תרגיל

מהו הסדר של

$$G = \left\langle (a, b, c) \middle| \begin{array}{c} 2a + 4b + 3c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 0 \end{array} \right\rangle$$

פתרון

G נוצר ע"י שלושה יוצרים e_1, e_2, e_3 כמודול מעל $\mathbb{Z}^3/A\cdot\mathbb{Z}^3$. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. נדרג את המטריצה, ונקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ מתאים לחוג $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. זאת לא הצורה הקנונית! הצורה הקנונית היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ מתאים לחוג $\mathbb{Z}_6$.

תרגיל

מצאו למטריצה $\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Z}$ מטריצה בגודל 2×2 אלכסונית קנונית הדומה לה[ז"א נרמלו את $\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$].

פתרון

נשים לב שהמחלק המשותף המקסימלי של $(27, 21)$ הוא 3. לכן המטרה היא להגיע למצב שבו בפינה הימנית העליונה יש לנו 3 - ואז נוכל להעביר אותו לפינה השמאלית העליונה ולדרג את המטריצה לצורה הקנונית שלה.

$$\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+4R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 27 & 84 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\cdot C_1 - C_2 \to C_2} \begin{pmatrix} 27 & \boxed{3} \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 9R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -189 \end{pmatrix}$$

דוגמה

$$1 = -1\cdot 2 + 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1 = -1\cdot 2 + (-1)(-3)$$

$$\overset{c_1+c_2+c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$