פתרון תרגיל בית 4 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תשפ״ב

שאלה 1 (חימום)**.** מצאו את כל האיברים מסדר סופי בחבורות הבאות: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$.

פתרון. ב-$\mathbb{Z}$ האיבר היחיד מסדר סופי הוא 0. אכן, $a \in \mathbb{Z}$ הוא מסדר סופי n אם ורק אם $na = 0$, אם ורק אם $a = 0$.

ב-$\mathbb{Q}^*$ וב-$\mathbb{R}^*$ הפתרון דומה, ולכן נפתור את שני המקרים ביחד. a הוא מסדר סופי n אם ורק אם $a^n = 1$. אבל השורשים הממשיים היחידים של 1 הם ± 1, ולכן אלו האיברים היחידים מסדר סופי ב-$\mathbb{Q}^*$ וב-$\mathbb{R}^*$.

שאלה 2 (חימום)**.** תארו את כל המחלקות השמאליות ב-$\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle$.

פתרון. האיבר 3 הוא מסדר 10, ולכן $|\langle 3\rangle| = 10$. לפי משפט לגראנז׳ נקבל

$$|\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle| = \frac{|\mathbb{Z}_{30}|}{|\langle 3\rangle|} = \frac{30}{10} = 3$$

והמחלקות, עד כדי בחירת נציגים, הן $\{\langle 3\rangle, 1+\langle 3\rangle, 2+\langle 3\rangle\}$.

שאלה 3. תהיינה G_1, G_2 חבורות, ותהי $K \leq G_1 \times G_2$ תת־חבורה. הוכיחו או הפריכו: קיימות תת־חבורות $H_1 \leq G_1$ ו-$H_2 \leq G_2$ כך ש-$K = H_1 \times H_2$.

פתרון. הפרכה. יש הרבה דוגמאות נגדיות, למשל אפשר לקחת $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}$ ו-$K = \langle (1,1)\rangle = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. הראיתם בתרגיל בית 2 ש-$K$ היא תת־חבורה של $G_1 \times G_2$, ומצד שני ברור שהיא לא מהצורה $H_1 \times H_2$.

שאלה 4. מצאו את כל המספרים n כך ש-$\varphi(n) = 4$ וכל המספרים m כך ש-$\varphi(m) = 8$. זה בסדר להשתמש במחשב עבור פעולות חשבון פשוטות.

פתרון. אם ראשוני $p \geq 7$ מחלק את n, אז $n = p^k n'$ עבור $k \geq 1$ עם n' שזר ל-p ולכן

$$\varphi(n) = \varphi(p^k n') = \varphi(p^k)\varphi(n') = (p^k - p^{k-1})\varphi(n') > 4$$

כי $p^{k-1}(p-1) > 4$ ו-$\varphi(n')$ טבעי. כלומר אנחנו מחפשים מספרים מהצורה $n = 2^a 3^b 5^c$ עם הדרישות $b, c < 2$ ו-$a < 4$. בדיקה זריזה אחרי פתרונות בקבוצה הסופית הזאת למשוואה $\varphi(n) = 4$ תגלה שהם רק $5, 8, 10, 12$.

באופן דומה, אם ראשוני $p \geq 11$ מחלק את m, אז $\varphi(m) > 8$. לכן מחפשים מספרים מהצורה $m = 2^a 3^b 5^c 7^d$ עם הדרישות $a < 5, b < 3, c < 2, d < 2$. בדיקה זריזה אחרי פתרונות בקבוצה הסופית הזאת למשוואה $\varphi(m) = 8$ תגלה שהם רק $15, 16, 20, 24, 30$.

שאלה 5. נתבונן בחבורת שורשי היחידה Ω_∞.

א. מצאו תת־חבורה אינסופית נאותה של Ω_∞. (תזכורת: תת־חבורה $H \le G$ נקראת נאותה אם $H \ne G$)

ב. הוכיחו שכל תת־חבורה נאותה של Ω_∞ היא מאינדקס אינסופי.
הדרכה אפשרית: אם $H \le G$ תת־חבורה נאותה, ניקח $\omega_n \notin H$ שורש יחידה מתאים. הראו ששורשי היחידה $\omega_n, \omega_{2n}, \omega_{3n}, \dots$ שייכים למחלקות שונות של H.

פתרון.

א. נתבונן בתת־החבורה $H = \left\{ z \in \Omega_\infty \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^{2^n} = 1 \right\}$. קל לוודא שזו תת־חבורה, היא אינסופית כי $e^{\frac{2\pi i}{2^n}} \in H$ לכל n, אבל היא נאותה כי $e^{\frac{2\pi i}{3}} \notin H$.

ב. נפלה בשאלה הזו טעות בהדרכה: נראה כי $\omega_n, \omega_{n^2}, \omega_{n^3}, \dots$ שייכים למחלקות שונות של H.
תהי $H \lneq G$ תת־חבורה נאותה. אם $H = \{1\}$, אז היא בוודאי מאינדקס אינסופי, כי Ω_∞ אינסופית. נניח מעתה כי $H \ne \{1\}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. נשים לב כי Ω_∞ נוצרת על ידי $\{\omega_n \mid n > 1\}$, ולכן בהכרח קיים $n > 1$ טבעי שעבורו $\omega_n \notin H$.
נטען כי $\omega_n, \omega_{n^2}, \omega_{n^3}, \dots$ שייכים למחלקות שונות של H. אכן, נניח בשלילה שקיימים $j < k$ כך ש-$\omega_{n^k}H = \omega_{n^j}H$, כלומר $\omega_{n^k}^{-1}\omega_{n^j} \in H$. נחשב ונקבל

$$z = \omega_{n^k}^{-1}\omega_{n^j} = e^{-\frac{2\pi i}{n^k} + \frac{2\pi i}{n^j}} = e^{\frac{2\pi i (n^{k-j} - 1)}{n^k}} \in H.$$

נשים לב כי $(n^k, n^{k-j} - 1) = 1$ (שהרי כל גורם ראשוני p של n^k הוא גורם ראשוני של n^{k-j}, ולכן אינו מחלק את $n^{k-j} - 1$). לכן קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ שעבורם $an^k + b(n^{k-j} - 1) = 1$. מהסגירות של H לכפל נקבל $z^b \in H$, ומצד שני

$$z^b = e^{\frac{2\pi i}{n^k} \cdot b(n^{k-j} - 1)} = e^{\frac{2\pi i}{n^k} \cdot (1 - an^k)} = e^{-2\pi i \cdot a + \frac{2\pi i}{n^k}} = e^{\frac{2\pi i}{n^k}} \in H.$$

אבל כעת נעלה בחזקת n^{k-1} ונקבל

$$(z^b)^{n^{k-1}} = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \omega_n \in H$$

בסתירה להנחה.
זה מראה שיש אינסוף מחלקות שמאליות שונות של H, ובסך הכל נסיק $[G : H] = \infty$.

שאלה 6. מצאו את האינדקסים הבאים:

א. $[U_{14} : \langle 11 \rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ב. $[\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (2,2) \rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ג. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (2,2) \rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

פתרון.

א. איברי U_{14} הם הטבעיים שקטנים וזרים ל-14. כלומר $U_{14} = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$. חישוב קצר יראה כי $\langle 11 \rangle = \{1, 9, 11\}$, ואז לפי משפט לגרנז' נקבל שיש בדיוק שתי מחלקות שמאליות. כלומר $[U_{14} : \langle 11 \rangle] = 2$.

ב. הסדר של החבורה $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ הוא $8 \cdot 8 = 64$, והסדר של תת־החבורה $\langle (2,2) \rangle$ הוא כסדר של האיבר $(2,2)$, שהוא 4. לכן לפי משפט לגראנז' $[\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (2,2) \rangle] = 64/4 = 16$.

ג. נוכיח כי $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (2,2) \rangle] = \infty$ לפי זה שנראה ש-$\{(0,n) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ היא קבוצה אינסופית של מחלקות שמאליות שונות (אלו לא כל המחלקות). אם $(0,n) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (0,m) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ זה אומר

$$(0,n) - (0,m) \in \langle (2,2) \rangle$$

כלומר ש-$(0, n-m) = (2k, 2k)$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$. לכן $n - m = 0$, ולכן $n = m$. כלומר יש אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

שאלה 7. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $(|H|, |K|) = 1$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

פתרון.

א. ידוע לנו כי $H \cap K$ היא תת־חבורה של H ושל K. לכן לפי משפט לגראנז' מתקיים כי $|H \cap K|$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$. אך לפי הנתון הממ"מ של $|H|$ ו-$|K|$ הוא 1. לכן $|H \cap K| \leq 1$. אבל תמיד $|H \cap K| \geq 1$ כי איבר היחידה שייך אליו, ולכן קיבלנו כי $H \cap K = \{e\}$.

ב. יהי $x \in H \cap K$ איבר כלשהו. נניח בשלילה כי $x \neq e$. לכן $o(x) > 1$. אנחנו יודעים כי $o(x)$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$, ולכן בהכרח $o(x) = p$. כלומר $|\langle x \rangle| = p$ ומפני ש-H, K הן חבורות אז הן סגורה לפעולה ונסיק $\langle x \rangle \subseteq H, K$. מהנתון $|H| = |K| = p$ נקבל $H = \langle x \rangle = K$ כי ב-$\langle x \rangle$ יש בדיוק p איברים שונים. אך זו סתירה לנתון, ונסיק כי $x = e$.

שאלות רשות

שאלה 8. תהי I קבוצה מכוונת (כלומר I היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש-$k > i, j$). מערכת של חבורות $\{G_i\}_{i \in I}$ נקראת רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$.
הוכיחו שבמקרה זה $\bigcup_{i \in I} G_i$ היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.