

תרגיל 5

5 בספטמבר 2017

1. מצאו את עוצמת הקבוצות הבאות:
- א. קבוצת כל הקטעים במישור \mathbb{R}^2 המאונכים לציר ה- x . (קטע הוא הקו הישר המחבר בין שתי נקודות שונות).
- ב. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01.
- ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00.
- ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 11 או את הרצף 11.
- ה. $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\} \mid \forall n \in \mathbb{N} f(n) \neq f(n+1)\}$ כלומר הסדרות הטרינאריות (סדרות מ- $0, 1, 2$) שאין בהן זוג איברים עוקבים שווים.

2. מצאו את עוצמת תתי הקבוצות הבאות של $P(\mathbb{N})$:
- א. $F = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge |X^c| = \aleph_0\}$.
- ב. $K = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge \forall x, y \in X : (x \neq y \Rightarrow |x - y| > 17)\}$.
- ג. $L = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge \forall x, y \in X : 18 | (x - y)\}$.

3. עבור כל אחד מהביטויים קבעו את עוצמתו (מתוך $\aleph_0, \aleph, 2^\aleph, 2^{2^\aleph}$):
- א. $(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0}$.
- ב. $\aleph \cdot (5^\aleph + \aleph_0^{\aleph_0})$.
- ג. $\aleph \cdot \aleph_0^{\aleph_0 + \aleph}$.

4. א. הוכיחו שלכל קבוצה A קיימת פונקציה חח"ע $f : A^A \rightarrow P(A \times A)$.
- ב. הסיקו שאם A קבוצה אינסופית מעוצמה α אז $\alpha^\alpha = 2^\alpha$.

5. על הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ נגדיר יחס \sim באופן הבא: לכל $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- $$f \sim g \iff \forall x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$$

א. הוכיחו כי \sim יחס שקילות.

ב. תהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. חשבו את $|\sim[f]|$.
ג. חשבו את $|\sim/\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$.

6. א. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש-6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?
ב. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש-6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?
ג. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם כובעים לכבוד מסיבת פורים: 7 כובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו-5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יקבל בדיוק כובע אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?
ד. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות המחשב תהיינה מורכבות מ-6 ספרות (מתוך 10 אפשרויות) ו-12 אותיות (מתוך 52 אותיות האנגלית, גדולות וקטנות). כמה סיסמאות ניתן להרכיב?
7. ועידת פרס רוצה לחלק סכום של 10,000 ש"ח בין 10 זוכים. כמה אפשרויות עומדות לרשות הוועידה אם:
א. הפרסים הם מספרים שלמים אי-שליליים.
ב. הפרסים הם מספרים טבעיים.
ג. הפרסים הם מספרים שלמים אי-שליליים בכפולה של 100 ש"ח.
8. תהי A קבוצה מגודל n , ויהי R יחס סדר מלא עליה. חשבו את $|R|$.
9. א. כמה מספרים בין 1000 ל-10000 יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?
ב. כמה מספרים בעלי n ספרות לכל היותר יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?
10. א. בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?
ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?