# פיתרון תרגיל בית 6 במתמטיקה בדידה, מדמח קיץ תשעז

18 בספטמבר 2017

1. כמה סדרות $(a_1, ..., a_{10})$ של מספרים שלמים (לאו דוקא אי שליליים) יש המקיימות:

$$1 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq ... \leq |a_{10}| \leq 1000 \ (*)$$

**<u>פתרון:</u>**

ראשית נחשב עבור מספרים שלמים אי שליליים, כאשר במצב זה הערך המוחלט בתנאי חסר משמעות. נסמן:

$$x_1 = a_1 - 1, x_2 = a_2 - a_1, x_3 = a_3 - a_2, ..., x_{10} = a_{10} - a_9, x_{11} = 1000 - a_{10}$$

ונקבל שמספר הסדרות הנ"ל הוא בדיוק מספר הפתרונות של המשוואה $\sum_{i=1}^{11} x_i = 999$, כאשר $\forall 1 \leq i \leq 11 : x_i \geq 0$. מספר הפתרונות הוא, כפי שלמדנו:

$$\binom{11+999-1}{999} = \binom{1009}{999} = \binom{1009}{10}$$

כך מצאנו את מספר הסדרות בשלמים אי שליליים, אבל התרגיל אמר שהמספרים יכולים להיות גם שליליים! נשים לב שכל סדרה בשלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$ , מקיימת את התנאי גם אם נחליף חלק מאיברי הסדרה במינוס שלהם. כלומר, אם $(a_1, ..., a_{10})$ סדרה מספרים שלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, אז כל הסדרות מהצורה $(\pm a_1, ..., \pm a_{10})$ מקיימות גם הן את התנאי. לכן כל סדרה כנ"ל של מספרים שלמים אי שליליים מייצגת קבוצה של $2^{10}$ (כל איבר יכול להיות אחת משתי אופציות: $+a_i$ או $-a_i$) סדרות כאלה במספרים שלמים לאו דוקא אי שליליים. לכן הפיתרון הסופי הוא:

$$2^{10}\binom{1009}{10}$$

2. הועד האקדמי של הפקולטה להנדסה פרסם תחרות מאמרים אקדמיים: יחולקו 5 פרסים כספיים (מניחים שבפקולטה יש לפחות 5 סטודנטים שיגישו מאמר) בסדר עולה, עם הפרש של לפחות 1000 ש"ח בין פרס לפרס, כאשר הפרס הראשון (עבור המאמר המוצלח ביותר) יהיה לכל היותר 20000 ש"ח, והאחרון (עבור המאמר החמישי במוצלחותו) יהיה לכל הפחות 1000 ש"ח. כמה אפשרויות יש לחלוקת הפרסים בין הסטודנטים?

**<u>פתרון:</u>**

הבעיה שקולה לבעיה הבאה: כמה סדרות של מספרים $(a_1,...,a_5)$ יש המקיימות: $a_1 \geq 1000, a_5 \leq 20000$, ובנוסף לכל $1 \leq i \leq 4$ מתקיים $a_{i+1} \geq a_i + 1000$. נסמן $x_0 = a_1 - 1000, \forall 1 \leq i \leq 4 : x_i = a_{i+1} - a_i - 1000, x_5 = 20000 - a_5$.
נקבל שמספר הסדרות הנ"ל שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=0}^{5} x_i = 15000$ כאשר לכל $0 \leq i \leq 5$ המשתנה $x_i$ שלם אי שלילי. מספר הפתרונות הוא:

$$\binom{6+15000-1}{6} = \binom{15005}{6}$$

3. א. המחלקה למדמח החליטה על חלוקה של 11 פרסים על מאמרים מצטיינים. ידוע שרק חמישה חוקרים זכו. הוכיחו שיש לפחות שלושה מאמרים זוכים השייכים לאותו חוקר.
ב. סבא מחלק $m$ ש"ח בסה"כ ל־$n$ נכדיו כדמי חנוכה (הסבא עשיר כלומר, $m > n$) במספרים שלמים. הוכיחו שקיים נכד שקיבל לפחות $\frac{m}{n}$ ש"ח.

**__פתרון:__**

א. נניח בשלילה שלכל חוקר זכו לכל היותר 2 מאמרים. ידוע שרק חמישה חוקרים זכו, ולכן לכל היותר 10 מאמרים זכו, בסתירה לכך שהפרסים מחולקים על 11 מאמרים.

ב. נניח בשלילה שכל נכד קיבל פחות מ־$\frac{m}{n}$. לכן סך הכסף שחולק ע"י הסבא הנכבד הוא קטן ממש מ־$n \cdot \frac{m}{n} = m$, בסתירה לכך שהוא חילק $m$ ש"ח.

4. מספר התלמידים בכיתה הוא 34. ציון של תלמיד הוא מספר טבעי בין אפס לבין מאה, כולל. מצאו כמה אפשרויות יש להעניק ציון לתלמידים כך שהציון הממוצע בכיתה יהיה 87. (רמז: מה צריך להיות סכום הציונים?)

**__פתרון:__**

ישנם 34 סטודנטים. נסמן ב $x_i$ את הציון שקיבל סטודנט $i$ (כאשר $1 \leq i \leq 34$). כיוון שהממוצע הוא 87 מתקיים כי

$$\frac{\sum_{i=1}^{34} x_i}{34} = 87$$

כאשר $0 \leq x_i \leq 100$ לכל $i$. המשוואה שקולה לכך שמתקיים כי $\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 = 87 \cdot 34$. נגדיר את הקבוצות הבאות:

$U$ מספר האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר יש רק את האילוצים $0 \leq x_i$ ללא האילוצים הנוספים $x_i \leq 100$.

לכל $i$ נגדיר את $A_i$ להיות קבוצת האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \geq 101$ ואין אילוצים על המשתנים האחרים (כלומר לכל $j$ ששונה מ $i$ יתכן כי $x_j \leq 100$).

מסקנה: הקבוצה $A_i \cap A_j$ מכילה את האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \geq 101 \wedge x_j \geq 101$.

וכך הלאה לגבי שאר האפשרויות לחיתוכים של קבוצות.

כעת, נחשב את הגדלים של הקבוצות (והחיתוכים שלהן...):

כיוון שבקבוצה $U$ אין שום אילוץ על $x_i$־ים, אז זאת פשוט הנוסחה של מנייה בלי סדר ועם חזרה, ונקבל $|U| = \binom{34+2958-1}{34-1}$.

לכל $i$, עבור חישוב $A_i$, סטונדט $i$ קיבל לפחות 101 נקודות, כלומר קיים האילוץ $x_i \geq 101$. נשים לב שבמקום המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958$$

עם האילוצים $x_i \geq 101$ ולכל $j \neq i$ $x_j \geq 0$, אפשר להסתכל על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 101$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל $j$.
ולכן הגודל של $A_i$ הוא $|A_i| = \binom{34+2859-1}{34-1}$.

באופן דומה עבור $A_i \cap A_j$ ניתן לחשוב על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 202$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל $j$. ובאופן דומה נקבל כי $|A_i \cap A_j| = \binom{34+2756-1}{34-1}$.

ניתן לראות עקביות: עד לחיתוך של $2958/101 = 29$ (מעוגל למטה) של קבוצות (לא יכול להיות ש־30 ומעלה תלמידים קיבלו מעל 100, השאר קיבלו ציון לא שלילי והממוצע 87, ולכן עוצמת החיתוך של 30 ומעלה קבוצות היא 0 ולא תורמת בנוסחת ההכלה והדחה כלום).

כעת נוכל לחשב את גודל הקבוצה

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c$$

כי זאת בדיוק קבוצת כל הפתרונות למשוואה כך שלכל $i$ מתקיים $x_i \leq 100$ ביחד עם התנאי שחוזר בכל הקבוצות של $0 \leq x_i$, וזהו הגודל המבוקש בשאלה. נחשב אותו בעזרת הכלה־הדחה. מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{34} A_i\right)^c = U \setminus \bigcup_{i=1}^{34} A_i$$

ולכן הגודל המבוקש הוא $|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right|$ נחשב בעזרת נוסחת להכלה־הדחה

$$\begin{aligned}|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right| &= |U| - \sum_{i=1}^{34} |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &= \binom{34}{0}|U| - \binom{34}{1}|A_i| + \binom{34}{2}|A_i \cap A_j| - \binom{34}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots\end{aligned}$$

ונקבל בסופו של דבר:

$$\sum_{i=0}^{29} (-1)^i \cdot \binom{34}{i} \cdot \binom{34 + 2958 - i \cdot 101 - 1}{34 - 1}$$

5. $n$ אנשים נכנסים למסעדה. לכל אחד מהם מעיל ועניבה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ועניבה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את עניבתו (ייתכן שמישהו יקבל את

המעיל או העניבה, אך לא את שניהם)?

**פתרון:**

נקרא לבחירה אקראית של מעיל ועניבה "ערבוב". נסמן כמה קבוצות שתהיינה הרכיבים הדרושים להוכחה:

$A_i$ תהיה קבוצת האפשרויות שלקוח $i$ יקבל את העניבה שלו והמעיל שלו.

נשים לב שאחרי שקבענו לאן הולך כובע ועניבה אחת בחירת השאר היא ערבוב של העניבות והמעילים ולכן $|A_i| = ((n-1)!)^2$.

$U$ תהיה קבוצת האפשרויות לקבלת מעיל ועניבה (קבוצה אוניברסלית).

נשים לב שכל אפשרות היא בעצם ערבוב של העניבות ושל המעילים ולכן $|U| = (n!)^2$.

$A_i \cap A_j$ קבוצת האפשרויות שלקוחות $j, i$ יקבלו, כל אחד, את העניבה שלו והמעיל שלו.

קבענו שתי עניבות ושני מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של העניבות והמעילים של השאר, כלומר: $|A_i \cap A_j| = ((n-2)!)^2$.

באופן דומה, נבדוק מה גודלה של קבוצת האפשרויות ש־$k$ לקוחות ספציפיים יקבלו את העניבה והמעיל שלהם.

קבענו $k$ עניבות ו־$k$ מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של עניבות ומעילים של השאר, כלומר: $((n-k)!)^2$.

רוצים שאף אחד לא יקבל גם מעיל וגם עניבה ולכן לסיכום בעזרת עקרון ההכלה־הדחה נקבל:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\
&= |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&= \binom{n}{0}\cdot (n!)^2 - \binom{n}{1}\cdot ((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}\cdot ((n-2)!)^2 - \binom{n}{3}\cdot ((n-3)!)^2 + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}((n-k)!)^2 + \ldots \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\cdot ((n-i)!)^2
\end{aligned}$$

6. האם קיים גרף שדרגות קודקודיו הן: (אם כן ־ ציירו אותו, אם לא ־ הוכיחו שלא קיים!)
   א. ?3,3,3,3
   ב. ?3,3,3,3,3
   ג. ?1,1,2,3,4,5

**פתרון:**

א. כן, ריבוע עם שני איקסים (הגרף המלא עם ארבעה קודקודים).

ב. לא, סך דרגות הקודקודים יוצא אי־זוגי בסתירה ללמת לחיצת הידיים.

ג. כאן למת לחיצת הידיים "עוברת", אבל נשים לב שיש לנו קודקוד מדרגה $5$, לכן שולח קשת לכל אחד. נסיר את הקודקוד הזה וחמשת צלעותיו ונקבל גרף עם חמשה קודקודים והדרגות הבאות: $0, 0, 1, 2, 3$, האחרון מדרגה $3$ אבל יש לו רק שני קודקודים אליהם הוא יכול להישלח בסתירה.

7. יהי $G$ גרף עם $6$ קודקודים. הוכיחו שב־$G$ או במשלים $\overline{G}$ יש משולש (מעגל המורכב משלושה קודקודים).

**פתרון:**

סימון: את הדרגה של קודקוד $v$ במשלים נסמן ב־$\overline{deg(v)}$.

נתבונן בקודקוד ספציפי $v$. נחלק למקרים:

1. $deg(v) \leq 2$: לכן במשלים נקבל $\overline{deg(v)} = 6 - 1 - deg(v) \geq 3$. נסמן את שלושת שכניו במשלים הבטוחים (אולי יש עוד) ב־$u_1, u_2, u_3$. אם קיימים $1 \leq i \neq j \leq 3$ כך שהקשת $\{u_i, u_j\} \in \overline{G}$, קיבלנו משולש במשלים: $v, u_i, u_j$. אחרת, ז"א שכל שלושת הקשתות האפשריות בין $u_i, u_2, u_3$ לא נמצאות במשלים, ולכן שלושתן נמצאות בגרף המקורי וקיבלנו משולש במקורי.
2. $deg(v) \geq 3$: נעשה מה שעשינו לעיל על הגרף המקורי.

8. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים גרף $3$ רגולרי עם $100$ קודקודים.

ב. אם $G$ גרף רגולרי אז גם הגרף המשלים $\overline{G}$ רגולרי.

ג. יהי $G$ גרף, אזי: $G$ קשיר או $\overline{G}$ קשיר.

**פתרון:**

א. הוכחה. ראה שאלה 6 סעיף א, הכפל את הגרף ב־$25$. (כלומר, $25$ ריבועים זרים).

ב. הוכחה. נסמן את מספר הקודקודים בגרף ב־$n$. ראינו ש־ $\overline{deg(v)} = n - 1 - deg(v)$. לכן אם לכל $v \in V$ מתקיים $deg(v) = k$ נקבל שלכל $v \in V$ מתקיים $\overline{deg(v)} = n - 1 - k$, ולכן הגרף רגולרי.

ג. הוכחה. אם $G = (V, E)$ קשיר סיימנו. אחרת, נקבל שיש לפחות שני רכיבי קשירות ב־$G$. נראה שהמשלים קשיר: יהיו $u, v \in \overline{G} = (V, \overline{E})$. נחלק למקרים:

אם $(u, v) \notin E$ אז $(u, v) \in \overline{E}$, וכמובן שיש מסלול ביניהם.

אם $(u, v) \in E$ זאת אומרת שהם באותו רכיב קשירות. לכן ניקח קודקוד מרכיב קשירות אחר (קיים כזה, כי יש לפחות שני רכיבי קשירות) ונסמנו ב־$w$. נקבל $(u, w), (w, v) \in \overline{E}$, ולכן יש מסלול: $u, w, v$ כדרוש.