טענת עזר לקראת אי"ש הממוצעים

20 באוקטובר 2015

טענה

יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n$ מספרים ממשיים וחיוביים המקיימים $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$, וקיים שוויון אם ורק אם $a_k = 1$ לכל $1 \leq k \leq n$.

פתרון

באינדוקציה על n.
עבור $n = 1$ זה ברור. נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} &= \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} + (a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1}) \\ &\geq n + (a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

(מהנחת האינדוקציה) ואפשר גם להניח בה"כ כי $a_n \leq 1$, $1 \leq a_{n+1}$ (ע"י שינוי סדר האיברים, ודאו!). נשאר להוכיח כי $(a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1}) \geq 1$, ואכן

$$a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1} - 1 = a_{n+1}(1 - a_n) - (1 - a_n) = (a_{n+1} - 1)(1 - a_n) \geq 0$$

כנדרש.
כעת לחלק השני של הטענה: אם לכל $1 \leq k \leq n$ $a_k = 1$ השוויון ברור; אם אחד מה-a_k שונה מ- 1 אז במעבר האינדוקציה האי־שוויונים בסוף ("ואפשר גם להניח...") הופכים לחזקים, לכן אין שוויון.