

פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס' 2

1. מצא לפי ההגדרה את הנגזרת (בתחום שהיא קיימת) של הפונקציה $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$.

2. בדקו האם פונקציות הבאות רציפות/גזירות/אנליטיות בנקודה $z = 0$:

א. $g(z) = |z|^2$

ב. $h(z) = \bar{z} - 4z^3$

3. תהי $f(z)$ אנליטית ב- \mathbb{C} ולכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $(\operatorname{Re} f(z))^2 = \operatorname{Im}(f(z))$. צ"ל f קבועה על \mathbb{C} .

4. תהי $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ כאשר u, v גזירות ברציפות בתחום D .
נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

א. צ"ל: f מקיימת את תנאי קושי-רימן ב- D אם ורק אם $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ב- D , וכי במקרה זה מתקיים $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

ב. צ"ל: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{4} \Delta f$ (בהנחה ש- u, v גזירות פעמיים ברציפות בתחום D).

5.

א. האם קיימת פונקציה f אנליטית כך ש- $\operatorname{Re}(f) = x^2 y$?

ב. מצאו פונקציה אנליטית f כך ש- $\operatorname{Re}(f) = x^3 - 3xy^2$.

PDFill PDF Editor with Free Writer and Tools