תרגיל בית 5 - אנליזה למורים

21 בדצמבר 2016

שאלה 1

מצאו את בסכום הטור $\sum_{n=3}^{\infty}-\frac{7\cdot(-2)^{n+1}}{3}$.

פתרון

$\sum_{n=3}^{\infty}-\frac{7\cdot(-2)^{n+1}}{3}=\frac{7}{3}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}(-2)^{n}=\frac{7}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{n}$
האיבר הכללי אינו שואף לאפס ולכן הטור מתבדר

הערה:

שימו לב שטור מתחיל מאינדקס 3 ולא מ-0 כמו בנוסחה.

שאלה 2

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{2}}\right)$.

הדרכה:

נחשב את סדרת הסכומים החלקיים ונגלה כי זהו טור טלסקופי. (רמז: מצאו את המכנה המשותף, והשתמשו בחוקי הלוגים). לאחר צמצום אנו מגלים כי סדרת הסכומים הלקיים שווה ל:

$S_{n}=\sum_{k=1}^{n}ln\left(1-\frac{1}{(k+1)^{2}}\right)$ ולכן סכום הטור, הרי הוא גבול סדרת סכומים החלקיים, שווה ל-$\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{2}}\right)=lim\left(S_{n}\right)=?$.

פתרון:

$$1-\frac{1}{(n+1)^{3}}=\frac{(n+1)^{2}-1}{(n+1)^{2}}=\frac{n^{2}+2n+1-1}{(n+1)^{2}}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$S_{N}=ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\right)+\cdots+ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=ln\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+2}{2+1}\right)\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=ln\left(\frac{1}{2}\right)+ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$1+\frac{1}{n+1}\to 1$ ולכן $ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$ ולכן $S_{N}\to ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן סכום הטור הוא $ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

שאלה

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+36n+323}$.

הדרכה:

ראשית, נפרק את הביטוי לשברים חלקיים: $\frac{1}{n+19} - \frac{1}{n+17} = \frac{2}{n^2+36n+323}$.

כעת נחשב את סדרת הסכומים החלקיים ונגלה כי זהוא טור טלסקופי, לאחר צמצום אנו מגלים כי סדרת הסכומים החלקיים שווה ל:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+36k+323} = ?$, ולכן סכום הטור, הרי הוא גבול של סדרת הסכומים החלקיים, שווה ל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+36n+323} = lim_{n\to\infty}(S_n) = ?$$

פתרון:

הגבול שווה $\frac{1}{18} + \frac{1}{19}$

שאלה 4

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר.

הדרכה:

כיוון שהטור $\sum b_n$ מתכנס אזי $lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ואז מה אפשר להגיד על $lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$?

פתרון:

הוכחה: לפי התכנסות הטור מקבלים $lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ולכן לפי כלל מנה $lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$ (אנחנו מדברים כאן על טורים חיוביים כלומר$b_n \geqslant 0$ לכן אין צורך בערך מוחלט במכנה) ובפרט $\frac{1}{b_n} \nrightarrow 0$ ולכן כאן לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות הטור ולכן הוא מתבדר.

ב) יהי טור חיובי $\sum a_n$ אם הטור $\sum a_n^2$ מתכנס אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס.

רמז:

התבוננו בטור $\sum \frac{1}{n}$.

פתרון:

הפרכה: נתבונן ב־$\sum \frac{1}{n^2}$ וזהוא טור מתכנס אבל $\sum \frac{1}{n}$ טור מתבדר.

שאלה 5

קבע האם הטורים הבאים מתכנסים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

פתרון:

נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים: $S_1 = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, באינדוקציה נקבל $\{S_n\} = -1, 0, -1, 0, -1, ...$ ולכן זו סדרה שאינה מתכנסת ולכן לפי ההגדרה גם הטור מתבדר.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

פתרון:

לפי מבחן המנה מקבלים: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{(n+1)2^n}{n!}\right)} = \frac{2(n+2)}{(n+1)^2} \to 0$ ולכן הטור מתכנס

ג) $\sum \frac{n^3}{(ln3)^n}$

פתרון:

נשתמש במבחן השורש: $\sqrt[n]{\frac{n^3}{(ln3)^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{ln3} \to \frac{1}{ln3} < 1$ ולכן הטור מתכנס.

ד) $\sum \frac{1}{n^2+1}$

פתרון:

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור:לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \widetilde{S_n}$ כאשר $\widetilde{S_n}$ היא סדרת הסכומים הלקיים של $\sum \frac{1}{k^2}$ אשר ידוע כי טור מתכנס ולכן

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1} = limS_n < lim\widetilde{S_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, כומר קיבלנו סדרת הסכומים החלקיים היא סדרה חסומה מלעיל, כמו כן סדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא סדרה מונוטונית עולה, סה"כ קיבלנו סדרת הסכומים החלקיים היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת מה שגורר שהטור שלנו מתכנס.

ה) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

פתרון:

נשתמש במבחן מנה: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2\cdot(n+1)}{(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 2 \cdot e^{-1}$

ו) $\sum \frac{n!}{a^n}$ עבור $a > 0$ קבוע.

פתרון:

זהו טור חיובי לפי הנתון, ולכן לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a} \to \infty > 1$ ולכן הטור מתבדר.