

אנליזה מתקדמת למורים, תרגיל 6

13 בדצמבר 2018

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

$$f(x + yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi \quad (\text{א})$$

$$f(x + yi) = xy + \frac{y^2 - x^2}{2}i \quad (\text{ב})$$

2. תהי $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה גזירה. כידוע, יש $U, V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$. הוכיחו שאם V פונקציה קבועה אז f קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של f קבוע, אז f קבועה).

3. חשבו את המספרים הבאים (כלומר, התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

$$e^{1+2i} \quad (\text{א})$$

$$e^{5\text{cis}\pi} \quad (\text{ב})$$

$$\sin(1 + i) \quad (\text{ג})$$

$$\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) \quad (\text{ד})$$

$$\ln(3 - 4i) \quad (\text{ה})$$

$$e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i} \quad (\text{ו})$$

4. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

$$\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)} \quad (\text{א})$$

$$\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)} \quad (\text{ב})$$

(ג) אם $z \neq 0$ ואיננו ממשי שלילי אז: $\overline{z^w} = \overline{z}^{\overline{w}}$. הדרכה: תשאירו את z, w כמות שהם ואל תרשמו אותם בצורה קרטזית או פולארית. פשוט לפי הגדרת החזקה.

בהצלחה!