

## תרגיל 9- טורי חזקות וטורי טיילור

### טורי חזקות

1.

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \quad (\text{א}) \quad \text{כאשר } p \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \quad (\text{ב})$$

2.

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n \quad (\text{ג})$$

3.

מצאו טור חזקות שסכומו הוא  $f(x)$  ומצאו רדיוס התכנסות:

$$\text{א. } f(x) = x e^{-x^3}$$

$$\text{ב. } f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} \quad (\text{רמז: רשמו תחילה טור טיילור עבור } \ln(1+x))$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{1}{9+x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \arcsin x \quad (\text{רמז: גזירה})$$

4.

א. הוכיחו שהטור  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$  מתכנס ושטור הנגזרות שלו מתכנס במידה שווה בקטע  $[1, 2]$  ובעזרתו

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \text{ חשבו את הסכום}$$

ב. הוכיחו שהטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!}$  מתכנס ושטור הנגזרות שלו מתכנס במידה שווה בקטע

$[0, 2]$  ובעזרתו חשבו את הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{(n-1)!}$ . רמז: מהו טור החזקות של  $e^{1-x^2}$ ?

### טורי טיילור

5.

פתחו לטור מקלוורן את הפונקציות הבאות וחשבו את  $f^{(8)}(0), f^{(9)}(0)$ .

א.  $f(x) = \sin^2 x$

ב.  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

6.

חשבו את  $\cos(1)$  עם שגיאה קטנה מ  $10^{-5}$ .  
שימו לב: הזווית היא ברדיאנים ולא במעלות.

7.

תהי  $f(x) = \ln(1+x)$

א. הראו שלכל  $-1 < c$  ולכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $f^{(n)}(c) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+c)^n}$

ב. חשבו את  $\ln(1.5)$  עם שגיאה קטנה מ  $0.01$ .

8.

המשוואה  $e^{-2x} = 3x^2$  בעלת שורש בסביבת  $x = 0$ .  
מצאו קירוב לשורש זה בעזרת טור טיילור המתאים ל- $e^{-2x}$ .

.9

בעזרת טור מקלורן של  $e^x$ , עבור  $x = \frac{1}{2}$ , חשבו את  $\sqrt{e}$  בדיוק של ארבע ספרות אחרי הנקודה.