**שאלון סגור**

**בס"ד**
**שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות**
**מספר הקורס : 83-115-01**
**מרצה : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'**
**סמסטר ב', מועד א' : ח' אב, התשעה (24.07.2015)**
**<u>משך הבחינה : שלוש שעות</u>**

**שאלה 1**

א. (8 נקודות)

$$\left(4x^3y+2xy^3-\beta xy^3\right)dx+\left(y^4-4x^4+\beta\left(\frac{5}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4\right)\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3+6xy^2-3\beta xy^2 \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-16x^3+10\beta x^3$$

$$4x^3+6xy^2-3\beta xy^2 \quad =-16x^3+10\beta x^3$$

$$\left(20-10\beta\right)x^3+\left(6-3\beta\right)xy^2=0$$

$$\left(20-10\beta\right)x^2+\left(6-3\beta\right)y^2=0$$

$$\beta=2$$

**ב.** (8 נקודות)

$$\left(4x^3y+2xy^3-\beta xy^3\right)+\left(y^4-4x^4+\beta\left(\frac{5}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4\right)\right)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy\left(4x^2+2y^2-\beta y^2\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)y^4+\left(\frac{5}{2}\beta-4\right)x^4}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy\left(4x^2+\left(2-\beta\right)y^2\right)}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)y^4}_{\text{want be zero}}+\left(\frac{5}{2}\beta-4\right)x^4}\Rightarrow \beta=-2\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{xy\left(4x^2+4y^2\right)}{-9x^4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\left(4x^2+4y^2\right)}{9x^3}$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{9x}y=\frac{4}{9x^3}y^2$$

**ג. (8 נקודות)**

**פתרון:** עבור $\alpha = 0$ נקבל

$$(4x^3y + 2xy^3)dx + (y^4 - 4x^4)dy = 0$$

ואז נבוא למשוואה הומוגנית

$$y' = \frac{4x^3y + 2xy^3}{4x^4 - y^4} = \frac{2xy(2x^2+y^2)}{(2x^2+y^2)(2x^2-y^2)} = \frac{2xy}{2x^2-y^2}\,.$$

ע"י ההחלפה $y = vx$ , $y' = v'x + v$ נקבל

$$v'x = \frac{2v}{2-v^2} - v = \frac{v^3}{2-v^2} \implies \frac{2-v^2}{v^3}dv = \frac{dx}{x}\,.$$

אחרי האינטגרציה נקבל

$$-\frac{1}{v^2} - \ln|v| = \ln|x| + \ln C$$

וההחלפה ההפוכה $v = y/x$ נותנת לנו את הנוסחה הסופית

$$-\frac{x^2}{y^2} = \ln|y| + \ln C.$$

נשאר לנו להוסיף לנוסחה הזו את הפתרון הסינגולרי $y = 0$.

## שאלה 2

**א. (8 נקודות)**

ידוע כי קבוצת פתרונות בסיסית של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר 3, שמקדמיה בהצגה סטנדרטית (מנורמלת) רציפים בקטע $(-1,1)$, חייבת לקיים:

$$W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0 \qquad \forall x \in (-1,1).$$

נבדוק אם התנאים הנתונים מקיימים את התנאי הנ"ל בנק' $x_0 = 0$ שנמצאת בקטע הפתוח $(-1,1)$;

$$W[y_1,y_2,y_3](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = y_1(y_2'y_3'' - y_3'y_2'') - y_2(y_1'y_3'' - y_3'y_1'') + y_3(y_1'y_2'' - y_2'y_1'').$$

$$W(0) = 1(1-1) + 1(1-1) + 0(-1+1) = 0$$

מכאן שהתנאי לא מתקיים ולכן __לא תתכן__ קבוצה בסיסית המקיימת את התנאים הנתונים

$$\begin{pmatrix} y_1(0) = 1 & y_1'(0) = -1 & y_1''(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 & y_2'(0) = -1 & y_2''(0) = 1 \\ y_3(0) = 0 & y_3'(0) = 1 & y_3''(0) = -1. \end{pmatrix}$$

**ב. (8 נקודות)**

$$4xy''-4\left(x+1\right)y'+\left(2+\frac{3}{x}\right)y=0 \ \ / x\neq 0$$

$$y=v(x)\sqrt{x},\ y'=\frac{v(x)}{2\sqrt{x}}+v'(x)\sqrt{x},$$

$$y''=\frac{1}{2}\frac{v'(x)\sqrt{x}-\frac{v(x)}{2\sqrt{x}}}{x}+\frac{v'(x)}{2\sqrt{x}}+v''(x)\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}v'(x)-\frac{v(x)}{4x\sqrt{x}}+v''(x)\sqrt{x}$$

$$4x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}v'(x)-\frac{v(x)}{4x\sqrt{x}}+v''(x)\sqrt{x}\right)-4(x+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}v(x)+\frac{x}{\sqrt{x}}v'(x)\right)+\left(2+\frac{3}{x}\right)v(x)\sqrt{x}=0 \ \ /\cdot x\sqrt{x}$$

$$4x\left(xv'(x)-\frac{v(x)}{4}+v''(x)x^2\right)-(4x+4)\left(\frac{xv(x)}{2}+v'(x)x^2\right)+\left(2x^2+3x\right)v(x)=0$$

$$4x^3v''(x)+\left(4x^2-4x^3-4x^2\right)v'(x)+\left(-x-2x^2-2x+2x^2+3x\right)v(x)=0$$

$$v''(x)-v'(x)=0$$

$$z=v':\ z'(x)-z=0$$

$$\frac{dz}{z}=dx$$

$$\ln|z|=x+C$$

$$z=\pm e^{x+C}$$

$$z=Ce^x,\ C\neq 0$$

$$v'=Ce^x,\ C\neq 0\ \Rightarrow\ v=C\int e^x dx=Ce^x+C_1$$

$$y=\left(Ce^x+C_1\right)\sqrt{x}=Ce^x\sqrt{x}+C_1\sqrt{x}$$

**שאלה 3 .**

**א. אם $y=e^x-4e^{-2x}$ פתרון של $y''+ay'+by=0$ , אזי למשוואה האופיינית שלה שני שורשים $r_1=1,\ r=-2$ ואז $r^2+ar+b=0=\left(r-1\right)\left(r+2\right)=r^2+r-2$ , מכאן, המשוואה היא $y''+y'-2y=0$ .**

**פתרון של משוואה לא הומוגנית נראה כך $y_p=Axe^x+Be^x$ (כי יש ריבוי).**

$$y_p=Axe^x+Be^x\ \Rightarrow\ y_p{}'=Ae^x+Axe^x+Be^x\Rightarrow\ y_p{}''=2Ae^x+Axe^x+Be^x$$

$$2Ae^x+Axe^x+Be^x+Ae^x+Axe^x+Be^x-2\left(Axe^x+Be^x\right)=e^x$$

$$e^x:3A=1$$

$$xe^x:0=0$$

$$A=\frac{1}{3},\ B\in\mathbb{R}\ \ \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=0\ \Rightarrow\ y_p=\frac{1}{3}xe^x$$

ופתרון כללי של משוואה לא הומוגנית $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x$

פתרון בעיית התחלה :

$$\begin{matrix} y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x \\ y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3}xe^x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y(0)=C_1+C_2=1 \\ y'(0)=C_1-2C_2+\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1+C_2=1 \\ C_1-2C_2=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_2=0 \\ C_1=1 \end{matrix}$$

מכאן, פתרון בעיית התחלה $y=e^x+\frac{1}{3}xe^x$

**ב.**

לא יתכן: מבנה זה מתאים לערכים עצמיים $\lambda_1=-2$, ו-$\lambda_2=2$ מכפילות 2, וזה בלתי אפשרי למשוואה מסדר 2.

**ג.**

לא יתכן, כי חסר פתרון פרטי מהצורה $Be^x$.

**ד.**

ב. נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה: $x^2y''-xy'+y=0$

זו משוואה סוג אוילר, לכן נחפש פתרון מהצורה : $y=x^r$

נקבל את המשוואה האופיינית :

$$r(r-1)-r+1=0$$

$$r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=1$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הוא : $y(x)=c_1x+c_2x\ln x$

נפתור את המשוואה הלא הומגנית באמצעות וארייצית הפרמטרים :

$$u_1'x+u_2'x\ln x=0 \Rightarrow u_1'=-u_2'\ln x$$

$$u_1'+u_2'\ln x+u_2'=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3} \Rightarrow u_2'=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3} \Rightarrow u_2=\ln x-\frac{3}{2x^2}+C_2$$

$$u_1'=-\frac{\ln x}{x}-\frac{3\ln x}{x^3} \Rightarrow u_1=-\frac{1}{2}\ln^2 x+3\left(\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}\right)+C_1$$

האינטגרלים האחרונים חושבו בהצבה ואו באינטגרציה בחלקים.

$$y(x)=c_1x+c_2x\ln x+x\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x+3\left(\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}\right)\right)+x\ln x\left(\ln x-\frac{3}{2x^2}\right)=$$

$$=c_1x+c_2x\ln x+\frac{1}{2}x\ln^2 x+\frac{3}{4x}$$

## שאלה 4 (16 נקודות)

**פתרון**

**א.** נמצא ע"ע:

$$\left|A-rI\right|=\begin{vmatrix} r_1-r & 0 & 0 \\ 2 & r_1-r & 0 \\ 1 & 1 & r_2-r \end{vmatrix}=(r_1-r)^2(r_2-r)$$

נמצא פתרונות בת"ל:

$\underline{r=r_1}:$

$$A-r_1I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & r_2-r_1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_2-r_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ r_1-r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון אחד: $X^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ r_1-r_2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{r_1t}$

הריבוי של $r_1$ הוא 2 ולכן נחפש ו"ע מוכלל, המקיים את הקשר $(A-r_1I)v_2=v_1$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & r_1-r_2 \\ 1 & 1 & r_2-r_1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (r_1-r_2)/2 \\ 0 & 1 & r_2-r_1 & 1-r_1/2+r_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix} (r_1-r_2)/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

פתרון שני: $X^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ r_1-r_2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{r_1t}+\begin{pmatrix} (r_1-r_2)/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}e^{r_1t}$

$\underline{r=r_2}:\qquad A-r_2I=\begin{pmatrix} r_1-r_2 & 0 & 0 \\ 2 & r_1-r_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow v_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון שלישי: $X^{(3)}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{r_2t}$ .

הפתרון הכללי:

$$\boxed{X(t)=c_1\begin{pmatrix} 0 \\ r_1-r_2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{r_1t}+c_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ r_1-r_2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{r_1t}+\begin{pmatrix} (r_1-r_2)/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}e^{r_1t}\right)+c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{r_2t}}$$

**ב.** נציב $X(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $r_1-r_2=-3$ :

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}1+c_2\left(\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}0+\begin{pmatrix}-3/2\\1\\1/2\end{pmatrix}1\right)+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}1$$

פתרון המשוואות נותן :

$$c_1=-1/3,\quad c_2=0,\quad c_3=1/3$$

$$X(t)=-(1/3)\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}e^{r_1t}+(1/3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{r_2t}=\begin{pmatrix}0\\e^{r_1t}\\(1/3)(e^{r_2t}-e^{r_1t})\end{pmatrix}$$

$$X'(t)=\begin{pmatrix}0\\r_1e^{r_1t}\\(1/3)(r_2e^{r_2t}-r_1e^{r_1t})\end{pmatrix}$$

נציב $X'(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ , $r_1-r_2=-3$ :

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\r_1\\(1/3)(r_2-r_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\r_1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r_1=1,r_2=4$$

לכן :

$$\boxed{X(t)=\begin{pmatrix}0\\e^{t}\\(1/3)(e^{4t}-e^{t})\end{pmatrix}}$$

## שאלה 5 (20 נקודות)

<u>**פתרון**</u>

**א.** התמרת לפלאס היא $\mathcal{L}(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

ונשתמש באינטגרציה בחלקים :

$$\mathcal{L}(y'')=\int_0^\infty e^{-st}y''dt=[e^{-st}y']_0^\infty-s\int_0^\infty e^{-st}y'dt=-y'(0)-s\int_0^\infty e^{-st}y'dt=$$

$$=-y'(0)-s[e^{-st}y]_0^\infty+s^2\int_0^\infty e^{-st}ydt=-y'(0)-sy(0)+s^2\mathcal{L}(y)$$

**ב.**

- <u>אפשרות א'</u> – <u>לפי הגדרה</u> :

פונקציית דלתא מקיימת $\int_a^b f(t)\delta(t-c)=\begin{cases}f(c) & if\ c\epsilon(a,b)\\ 0 & else\end{cases}$

לכן, לפי הגדרת התמרת לפלאס, התמרת לפלאס על אגף ימין נותנת

$$\mathcal{L}(t\delta(t-2))=\int_0^\infty e^{-st}t\delta(t-2)dt=2e^{-2s}$$

- <u>אפשרות ב׳</u> – <u>בעזרת דף הנוסחאות</u>:

בטבלת התמרות לפלאס כתוב כי מתקיים $\mathcal{L}\big(\delta(t-c)\big) = e^{-cs}$

וכן $\mathcal{L}((-t)^n f(t)) = F^{(n)}(s)$ כאשר $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$.

מכאן $\mathcal{L}\big(t\delta(t-2)\big) = \mathcal{L}\big((-t)^1 \cdot -\delta(t-2)\big) = \mathcal{L}^{(1)}\big(-\delta(t-2)\big) = (-e^{-2s})' = 2e^{-2s}$

כך או כך, ומסעיף א׳, נקבל שהתמרה על שני האגפים נותנת

$$2(s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)) - \mathcal{L}(y) = 2e^{-2s}$$

העברת אגפים והצבת תנאי ההתחלה נותנת $\mathcal{L}(y) = \frac{2\cdot 3}{2s^2-1} + \frac{2e^{-2s}}{2s^2-1}$

- <u>אפשרות א׳</u> – <u>בעזרת דף הנוסחאות בלבד</u>:

מ $\sinh(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2-a^2}$ וליניאריות ההתמרה נקבל $\frac{2}{2s^2-1} = \frac{1}{s^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sqrt{2}\sinh(\frac{1}{\sqrt{2}}t)$

בנוסף, מ $u_c(t)f(t-c) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)e^{-cs}$ נקבל $\frac{2e^{-2s}}{2s^2-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sqrt{2}u_2(t)\sinh(\frac{1}{\sqrt{2}}(t-2))$

- <u>אפשרות ב׳</u> – <u>פירוק לשברים חלקיים</u>:

$$\frac{2}{2s^2-1} = \frac{1}{s^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{A}{s+\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{B}{s-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

מכאן $1 = A\left(s-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + B\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (A+B)s + (B-A)\frac{1}{\sqrt{2}}$

ולכן $\frac{2}{2s^2-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{s+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

ואז מ $e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}$ נקבל $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{2s^2-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2}\sinh(\frac{1}{\sqrt{2}}t)$

ובשילוב עם $u_c(t)f(t-c) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)e^{-cs}$ נקבל

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-2s}}{2s^2-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}u_2(t)\left(e^{\frac{t-2}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{t-2}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2}u_2(t)\sinh(\frac{1}{\sqrt{2}}(t-2))$$

- <u>אפשרות ג׳</u> – <u>קונבולוציה</u>:

נסמן $\frac{2}{2s^2-1} = \frac{1}{s^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \frac{1}{\left(s-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = F(s)\cdot G(s)$

אזי מתקיים $F = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} = f(t)$ $\quad G = \frac{1}{\left(s-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{+\frac{t}{\sqrt{2}}} = g(t)$

ומכאן $F\cdot G \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (f*g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy = e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\int_0^t e^{\sqrt{2}y}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\right)$

ואז חוזרים על השלב האחרון של אפשרות ב׳.

ונִיתן לראות כי 3 האפשרויות שקולות:

$$\boxed{y =} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(y)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2\cdot 3}{2s^2-1} + \frac{2e^{-2s}}{2s^2-1}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}u_2(t)\left(e^{\frac{t-2}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{t-2}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= 3\sqrt{2}\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + \sqrt{2}u_2(t)\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t-2)\right)$$