פרק 10

פונקציות פסוקיות וכמתים

1. פסוקים פרטיים

הטכניקות הלוגיות של שני הפרקים הקודמים מאפשרות לנו להבחין בין ארגומנטים תקפים ולא־תקפים מטיפוס מסויים בלבד. ארגומנטים מאותו טיפוס מאופיינים באופן גם כארגומנטים אשר תקפותם תלויה רק בדרכים שבהן טענות פשוטות מתחברות באמצעות קשרי־אמת לטענות מורכבות. אולם, ישנם טיפוסים אחרים של ארגומנטים, אשר אמות־המידה של התקפות שהוזכרו בשני הפרקים הקודמים אינן חלות עליהם. דוגמה לטיפוס שונה הוא ארגומנט זה אשר תקפותו ברורה:

כל בני־אדם הם בני־תמותה.
סוקרטס הוא בן־אדם.
לכן סוקרטס הוא בן־תמותה.

אילו נקטנו בשביל ארגומנט זה את דרכי ההערכה שהוזכרו לעיל, היינו מסמלים אותו כך:

S
R
∴ T

אבל בסימון זה הוא מופיע כלא־תקף. אי־אפשר להחיל את הטכניקות של הלוגיקה הסימבולית, שהוצגו עד כה, על ארגומנטים מטיפוס חדש זה. תקפותו של הארגומנט הנתון איננה תלויה בדרך שבה מורכבות טענות

פשוטות, שכן שום טענה מורכבת איננה מופיעה בו. אלא תקפותו תלויה במבנה הלוגי הפנימי של הטענות הלא־מורכבות הכלולות בו. כדי לנסח דרכים לבחינת תקפותם של ארגומנטים מסוג חדש זה, יש להמציא טכניקות לתיאור ולסימול טענות לא־מורכבות — תוך הסתמכות על מבנן הלוגי הפנימי.[1]

הסוג הפשוט ביותר של טענה לא־מורכבת מאוייר בהקדמה השנייה של הארגומנט הקודם, "סוקרטס הוא בן־אדם". טענות מסוג זה כונו באופן מסורתי פסוקים פרטיים. פסוק פרטי (חיובי) טוען כי יחיד או פרט מסויים הוא בעל תכונה זו־וזו. בדוגמה הנוכחית, הדקדוק הרגיל והלוגיקה המסורתית יסכימו לסווג את "סוקרטס" כמונח הנושא ואת "בן־אדם" כמונח הנשוא או הפרדיקט. מונח הנושא מציין יחיד מסויים ומונח הנשוא מצביע על תכונה מסויימת, אשר לפי הטענה היא מצויה באותו יחיד.

ברור כי אותו מונח נושא עצמו עשוי להופיע בפסוקים פרטיים שונים. וכך לפנינו המונח "סוקרטס" כמונח הנושא בכל אחד מפסוקים אלה: "סוקרטס הוא אנושי", "סוקרטס הוא נקבה", "סוקרטס הוא הכם" ו"סוקרטס הוא יפה". מאלה אחדים אמיתיים (הראשון והשלישי) ואחדים שקריים (השני והרביעי).[2] גם ברור כי אותו מונח נשוא עצמו עשוי להופיע בפסוקים פרטיים שונים. וכך, לפנינו המונח "בן אדם" כמונח נשוא או פרדיקט בכל אחד מן הפסוקים הללו: "אריסטו הוא בן אדם", "ברזיל היא בן אדם", "שיקגו היא בן אדם", ו"דיוגנס הוא בן אדם". מאלה, אחדים אמיתיים (הראשון והרביעי) ואחדים שקריים (השני והשלישי).

צריך להיות ברור מן הנאמר לעיל, כי המלה "יחיד" או "פרט" משמשת כדי לציין לא רק בני־אדם, אלא כל דבר שהוא — כגון מדינה, עיר, או למעשה כל דבר שאפשר לייחס לו באורח משמעותי תכונה כנשוא. בחלק מן הדוגמאות שניתנו עד כה היה מונח הנשוא שם תואר ובחלקן — שם. מנקודת מבט דקדוקית נודעת חשיבות ניכרת להבחנה בין שם תואר ושם,

---

1. לארגומנטים מטיפוס זה הוקדשה בעיקרה הלוגיקה הקלסית או האריסטוטלית, כמתואר בפרק 5 ובפרק 6 בספרנו. אלא שהדרכים הישנות יותר אינן מחזיקות ברשותן את כלליותה או עוצמתה של הלוגיקה הסימבולית החדשה יותר ואינן ניתנות להרחבה כך שיכילו את ההיסק האסילוגיסטי.
2. כאן נלך בעקבות המנהג להתעלם מגורם הזמן, ונשתמש במלה "הוא" במובן האל־זמני של 'הווה, יהיה, או היה". כאשר שיקולים של שינוי זמן הם מכריעים, השיטות המסובכות קצת יותר של לוגיקת היחסים מאפשרות טיפול הולם.

אולם מנקודת מבט של תורת ההיגיון היא משוללת ערך. מבחינה לוגית אין שום הבדל בין "סוקרטס הוא אנושי" לבין "סוקרטס הוא בן־אדם".* אין גם שום הבדל בין "סוקרטס הוא חכם" לבין "סוקרטס הוא אדם חכם". נשוא יכול להיות שם תואר או שם, ואפילו פועל, כגון בפסוק "אריסטו כותב", שאפשר להביעו בדרך אחרת כגון "אריסטו הוא סופר".

בהניחנו כי באפשרותנו להבחין בין היחידים בעלי התכונות לבין התכו־נות העשויות להיות להם, נוכל להכניס שני סוגים שונים של סמלים כדי לציינם. בדיון דלהלן נשתמש באותיות לטיניות קטנות מ־a עד w כדי לציין יחידים. סמלים אלה מכונים קבועים אינדיווידואליים. בכל הקשר מסויים שהם מופיעים, כל אחד מהם מציין יחיד או אינדיווידואל אחד לאורך כל ההקשר. בדרך כלל יהיה נוח לציין יחיד באות הראשונה של שמו (או שמה). וכך, בהקשר הנוכחי נשתמש באותיות s, a, b, c, d כדי לסמן את היחידים סוקרטס, אריסטו, ברזיל, שיקגו ודיוגנס — לפי סדר זה. נשתמש באותיות לטיניות גדולות כדי לסמל תכונות, ויהיה נוח לנקוט באותם עקרו־נות מנחים גם כאן, כך שנשתמש באותיות B, T, N, H, Y כדי לסמל את התכונות של להיות בן־אדם, להיות בן־תמותה, להיות נקבה, להיות חכם, ולהיות יפה — לפי סדר זה.

לאחר שבידינו שתי קבוצות סמלים, האחת ליחידים והשנייה לתכונו־תיהם של יחידים, אנו מסגלים לעצמנו את הכלל המוסכם, שכתיבת סמל "תכונתי" אשר משמאלו של סמל "אינדיווידואלי" תהיה ניסוחנו הסמלי לפסוק פרטי, הטוען שהיחיד שצויין הוא בעל התכונה המסויימת. כיוון שכך, הפסוק הפרטי "סוקרטס הוא בן־אדם" יסומל Bs. שאר הפסוקים הפרטיים שהוזכרו, המכילים את הנשוא "בן־אדם", מסומלים Ba, Bb, Bc, Bd. לכולם, כפי שניתן לראות, מבנה משותף מסויים, שאין לסמלו כ־B כשלעצמו, אלא: —B, והמקף מציין כי מימינו של סמל הפרדיקט מופיע סמל אחר, סמל אינדיווידואלי. במקום להשתמש בסימן המקף כמסמן מקום, נהוג להשתמש באות x הקטנה (המוכנה לשימוש משום שרק האותיות הקטנות a עד w משמשות לציון יחידים). אנו משתמשים בסימון Bx [הנכתב לפעמים B(x)] כדי לסמל את המבנה המשותף של כל הפסוקים הפרטיים הטוענים כי ליחיד יש התכונה של להיות בן־אדם. האות x, המכונה מישתנה אינדיווידואלי, היא אך ורק מסמן מקום, בשמשה לציין היכן האותיות a עד w — הקבועים האינדיווידואליים — יכולים להיכתב כדי שהתוצאה תהא פסוקים פרטיים.

* במובן מסויים של הביטוי "אנושי", כמובן (העורך).

הפסוקים הפרטיים השונים Ba, Bb, Bc, Bd הם או אמיתיים או שקריים; אולם Bx איננו לא אמיתי ולא שקרי, שכן אין הוא כלל וכלל טענה או פסוק. הביטוי Bx הוא פונקציה פסוקית, שאפשר להגדירה כביטוי אשר (1) מכיל מישתנה אינדיווידואלי, (2) נעשה פסוק כאשר במקום המישתנה מוצב קבוע אינדיווידואלי.[3] קבועים אינדיווידואליים, כפי שהשתמע, צריכים להחשב כשמות פרטיים של יחידים. כל פסוק פרטי הוא מקרה הצבה של פונקציה פסוקית, תוצאה של הצבת קבוע אינדיווידואלי במקום מישתנה אינדיווי־דואלי באותה פונקציה פסוקית. בדרך כלל לפונקציה פסוקית יהיו מקרי הצבה אמיתיים אחדים ומקרי הצבה שקריים אחדים. הפונקציות הפסוקיות שנסקרו עד כה, דהיינו Bx, Tx, Nx, Hx, Yx, הן כולן מסוג זה. אנו נכנה פונקציות פסוקיות כאלה ""פרדיקטים פשוטים", כדי להבחין ביניהם לבין הפונקציות הפסוקיות המסובכות יותר, שיובאו בחלקים שלמטה.

II. כימות

הצבת קבועים אינדיווידואליים במקום מישתנים אינדיווידואליים איננה הדרך היחידה כדי להשיג פסוקים מפונקציות פסוקיות. אפשר להשיג פסו־קים בעזרת התהליך המכונה הכללה או כימות. פרדיקטים מופיעים תדיר בפסוקים שאינם פסוקים פרטיים. וכך, הפסוקים "כל דבר הוא בן־תמותה", ו"משהו הוא יפה" מכילים פרדיקטים, אולם אינם פסוקים פרטיים משום שאינם מכילים שמותיהם של יחידים מסויימים כלשהם. למעשה, אין הם נוגעים באופן ספציפי ליחיד מסויים כלשהו, כיוון שהם פסוקים כלליים.

הראשון יכול להיות מובע בדרכים שונות השקולות זו לזו מבחינה לוגית: או "כל הדברים הינם בני־תמותה", או

לגבי כל דבר שבעולם, הוא הינו בן־תמותה.

בנוסח האחרון, המלה "הוא" היא כינוי המתייחס אל המלה "דבר" המקדימה אותה במשפט. בהשתמשנו באות x, המישתנה האינדיווידואלי שלנו, במקום

3. מהברים אחדים ראו ב"פונקציות פסוקיות" את משמעותם של ביטויים כאלה, אך כאן אנו מגדירים אותן כביטויים עצמם.

הכינוי "הוא" ובמקום "דבר", נוכל לשכתב את הפסוק הכללי הראשון כך:

לגבי כל x שבעולם, x הינו בן־תמותה.

או, בהשתמשנו בסימון שהוצג בחלק הקודם, נוכל לכתוב:

לגבי כל x שבעולם, Tx.

אם כי הפונקציה הפסוקית Tx איננה פסוק, כאן לפנינו ביטוי המכיל אותה והוא פסוק. הביטוי "לגבי כל x שבעולם" מסומל כנהוג באמצעות '(x)', המכונה כמת כולל. הפסוק הכללי הראשון שלנו יכול להיות מסומל בשלמותו כך:

$$(x)Tx$$

הפסוק הכללי השני, "משהו הוא יפה", עשוי להיות מבוטא כך:

ישנו לפחות דבר אחד אשר הוא יפה.

בניסוח האחרון, המלה "אשר" היא כינוי יחס המתייחס אל המלה "דבר". בהשתמשנו במישתנה האינדיווידואלי שלנו x הן במקום כינוי היחס "אשר" והן במקום "דבר", נוכל לשכתב את הפסוק הכללי השני כך:

יש לפחות x אחד כך ש־x הינו יפה.

או, בהשתמשנו בסימון שבידנו, נוכל לכתוב:

יש לפחות x אחד כך ש־Yx.

ממש כמו לפני־כן, אם כי Yx הוא פונקציה פסוקית, לפנינו כאן ביטוי המכיל אותו והוא פסוק. הביטוי "יש לפחות x אחד כך ש..." מסומל כנהוג באמצ־עות "$(\exists x)$", והוא מכונה הכמת היישי. הפסוק הכללי השני יכול להיות מסומל בשלמותו כך:

$$(\exists x)Yx$$

הנה כי כן, אנו רואים כי אפשר ליצור פסוקים מפונקציות פסוקיות אם באמצעות המחשה, כלומר, באמצעות הצבתו של קבוע אינדיווידואלי במקום המישתנה האינדיווידואלי שלו, ואם באמצעות הכללה, דהיינו, באמצעות הצבתו של כמת כולל או כמת ישי לפניו. ברור כי הכימות הכולל של פונקציה פסוקית הוא אמיתי אם ורק אם כל מקרי ההצבה שלה הם אמיתיים, וכי הכימות היישי של פונקציה פסוקית הוא אמיתי אם ורק אם יש לה לפחות מקרה הצבה אמיתי אחד. אם אנו מסכימים כי יש לפחות יחיד אחד בעולם, הרי שלכל פונקציה פסוקית יש לפחות מקרה הצבה אחד. לפי הנחה זו, אם הכימות הכולל של פונקציה פסוקית הוא אמיתי, הרי שהכימות היישי שלו אמיתי גם הוא.

לכל הפונקציות הפסוקיות שהוזכרו עד כה יש רק פסוקים פרטיים חיוביים כמקרי הצבה. אולם לא כל הפסוקים הם חיוביים. שלילתו של הפסוק הפרטי החיובי "סוקרטס הוא בן־תמותה" היא הפסוק היחיד השלילי "סוקרטס איננו בן־תמותה". בסמלים אנו מקבלים Ts ו־$\sim Ts$. הראשון הוא מקרה הצבה של הפונקציה הפסוקית Tx. השני יכול להחשב כמקרה הצבה של הפונקציה הפסוקית $\sim Tx$. כאן אנו מרחיבים את מושגנו על הפונקציה הפסוקית מעבר לפרדיקטים הפשוטים שהוכנסו בקטע הקודם ומאפשרים להם להכיל את סימן השלילה "$\sim$".

עתה נוכל להדגים קשרים נוספים בין כימות כולל וכימות ישי. הפסוק הכללי (הכולל) "כל דבר הוא בן־תמותה" מוכחש בפסוק הכללי (היישי) "משהו איננו בן־תמותה". הם מסומלים באמצעות $(x)Tx$ ו־$(\exists x)\sim Tx$, לפי סדר זה. הואיל ואחד הוא שלילתו של זולתו, השקילויות

$$[\sim(x)Tx]\equiv[(\exists x)\sim Tx] \text{ ו־ } [(x)Tx]\equiv[\sim(\exists x)\sim Tx]$$

הן אמיתיות לוגית. באופן דומה, הפסוק הכללי (הכולל) "שום דבר איננו בן־תמותה" מוכחש בפסוק הכללי (היישי) "משהו הוא בן־תמותה". אלה מסומלים באמצעות $(x)\sim Tx$ ו־$(\exists x)Tx$, לפי סדר זה. הואיל ואחד הוא שלילתו של זולתו, השקילויות הנוספות:

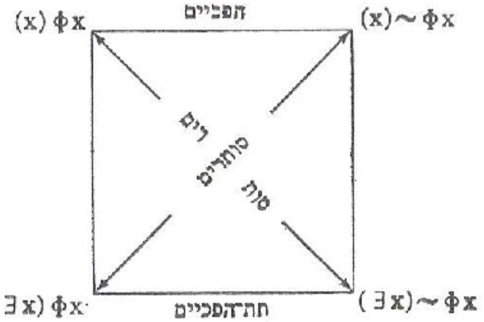
$$[\sim(x)\sim Tx]\equiv[(\exists x)Tx] \text{ ו־ } [(x)\sim Tx]\equiv[\sim(\exists x)Tx]$$

אמיתיות לוגית גם הן. אם נשתמש באות היוונית פי כדי לייצג כל פרדיקט,

יהא אשר יהא, היחסים בין הכימות הכולל והכימות היישי ניתנים להיות מנוסחים כדלהלן:

$$[(x)\phi x] \equiv [\sim(\exists x)\sim\phi x]$$
$$[(\exists x)\phi x] \equiv [\sim(x)\sim\phi x]$$
$$[(x)\sim\phi x] \equiv [\sim(\exists x)\phi x]$$
$$[(\exists x)\sim\phi x] \equiv [\sim(x)\phi x]$$

ובצורה גרפית יותר, את הקשרים הכלליים בין כימות כולל וכימות ישי אפשר לתאר במונחיו של מרובע זה:



תרשים 18

בהמשיכנו להניח קיומו של אינדיווידואל אחד לפחות, נוכל לומר ששני הפסוקים העליונים הם הפכיים, כלומר, יכולים שניהם להיות שקריים, אך אין שניהם יכולים להיות אמיתיים; שני הפסוקים התחתונים הם תת־הפכיים, דהיינו, שניהם יכולים להיות אמיתיים, אך אין שניהם יכולים להיות שקריים; פסוקים שהם בקצוות מנוגדים של האלכסונים הם סותרים, ואחד מהם חייב להיות אמיתי והשני שקרי; ולבסוף, בכל צד, אמיתותו של הפסוק התחתון מוסקת מאמיתותו של הפסוק הנמצא ישר מעליו.

III. פסוקי נושא־נשוא מסורתיים

ארבעת הסוגים של הפסוקים הכלליים, המודגשים באורח מסורתי בלימוד תורת ההיגיון, מודגמים באלה:

כל בני־האדם הם בני־תמותה.
שום בן־אדם איננו בן־תמותה.
בני־אדם אחדים הם בני־תמותה.
בני־אדם אחדים אינם בני־תמותה.

פסוקים אלה סווגו "כללי חיובי", "כללי שלילי", "חלקי חיובי" ו"חלקי שלילי", לפי סדר זה, וסוגיהם סומנו בקיצור A, E, I, O, לפי אותו הסדר (מימין לשמאל).[4]

בסמלנו פסוקים אלה בעזרת כמתים, יובילונו רגלינו להרחיב עוד את מושגנו על פונקציה פסוקית. בפנותנו תחילה לפסוק A, אנו ניגשים למלאכה באמצעות ניסוח מחודש רצוף, ומתחילים כך:

לגבי כל דבר שבעולם, אם הוא בן־אדם הרי שהוא בן־תמותה.

שני המקרים של הכינוי "הוא" מתייחסים בברור אל מקדימם המשותף, המלה "דבר". כמו בחלקו המוקדם של הקטע הקודם, הואיל ושלוש המלים מציינות אותו דבר (לא מוגדר), אפשר להמירן באות x, והפסוק משוכתב כך:

לגבי כל x שבעולם, אם x הינו בן־אדם הרי ש־x הינו בן־תמותה.

עתה, בהשתמשנו בסימון שהוכנס קודם בשביל "אם־הרי" ובסימון המוכר לנו עתה בשביל פונקציות פסוקיות וכמתים, פסוק A המקורי מובע כך:

$$(x)[Bx \supset Tx].$$

תרגומנו הסמלי של הפסוק A מופיע ככימות כולל של פונקציה פסוקית מסוג חדש. הביטוי $Bx \supset Tx$ הוא פונקציה פסוקית אשר מקרי ההצבה שלה אינם לא פסוקים פרטיים חיוביים ולא שליליים, אלא פסוקי תנאי אשר הרישא והסיפא שלהם הם פסוקים יחידים בעלי אותו מונח נושא. בקרב מקרי ההצבה של הפונקציה הפסוקית $Bx \supset Tx$ נמצאים פסוקי התנאי $Ba \supset Ta$, $Bb \supset Tb$, $Bc \supset Tc$, $Bd \supset Td$, וכך הלאה. ישנן גם פונקציות פסוקיות אשר מקרי ההצבה שלהן הן קוניונקציות של פסוקים יחידים בעלי אותם מונחי נושא. וכך, הקוניונקציות $Ba \cdot Ta$, $Bb \cdot Tb$, $Bc \cdot Tc$, $Bd \cdot Td$, וכך הלאה, הן מקרי הצבה של הפונקציה הפסוקית $Bx \cdot Tx$. ישנן גם פונקציות פסוקיות כגון $Hx \vee Yx$, אשר מקרי ההצבה שלהן הם דיסיונקציות כגון $Ha \vee Ya$ ו־$Hb \vee Yb$. למעשה, כל פסוק מורכב באמצעות קשרי־אמת, אשר הפסוקים

4. סקירה על ניתוחם ומיונם המסורתיים מוצגת בפרק 5. (שם הם נקראו בשם "טענות החלטיות". בעוד שכאן מדובר על "פסוקים", המחבר משתמש בשני המקרים בביטוי "פרופוזיציה". על הקשיים הנובעים מכך, ראה ההקדמה. העורך.)

הפשוטים הסופיים המרכיבים אותו הם פסוקים פרטיים שכולם בעלי אותו מונח נושא, יכול להחשב כמקרה הצבה של פונקציה פסוקית המכילה חלק או את כל קשרי־האמת השונים — נקודה, טריז, פרסה, סימן השוויון בן שלושת הקווים, וזרקה, בנוסף לנשואים הפשוטים Ax, Bx, Cx, Dx, ... וכולי. בתרגמנו את פסוק A כ־$(x)[Bx \supset Tx]$, משמשים הסוגריים המרובעים כסימני פיסוק. הם מציינים כי הכמת הכולל (x) "חל על" או "מכיל בתחומו" את מלוא (מכלול) הפונקציה הפסוקית $Bx \supset Tx$.

בטרם נמשיך כדי לדון בצורות המסורתיות האחרות של פסוקים החלטיים, יש לשים לב כי נוסחתנו הסמלית $(x)[Bx \supset Tx]$ מתרגמת לא רק את הפסוק בעל הצורה התקנית האומר "כל B הוא T", אלא גם כל פסוק אחר בשפת היום־יום בעל אותה משמעות. ישנן דרכים רבות בשפת יום־יום לומר אותו הדבר — ונוכל להביא כאן רשימה חלקית שלהן: "Bים הם Tים", "B הוא T", "כל ה־Bים הם Tים", "כל B ו־B הוא T", "B כלשהו הוא T", "שום B איננו לא־T", "כל דבר שהוא B הוא T", "כל מה שהוא B הוא T", "אם דבר כלשהו הוא B — הוא T", "אם משהו הוא B — הוא T", "כל דבר שבעולם שהוא B — הוא T", "Bים הם כולם Tים", "רק Tים הם Bים", "שום דבר מלבד T איננו B", "שום דבר איננו B אם איננו T", ו"שום דבר איננו B בלי שיהא T". ישנם ביטויים בשפת יום־יום המטעים במקצת בהשתמשם במונח של זמן בלי שתהא כוונה לציין זמן. וכך, הפסוק "Bים הם תמיד Tים" מובן כהלכה כטוען בפשטות שכל B הוא T. ושוב, אותה משמעות ניתן להביע בעזרת שמות עצם מופשטים: "אנושות גוררת תמותה" מסומל נכונה כפסוק A. העובדה, שלשפת הסמלים של תורת ההיגיון יש ביטוי אחד ויחיד למשמעות המשותפת של מספר ניכר של פסו־קים בשפת יום־יום, יכולה להחשב כיתרונה של הלוגיקה הסימבולית על השפה הרגילה לתכלית הכרתית או לתכלית מידעית — אם כי לכל הדעות זהו חיסרון מנקודת־מבטן של העוצמה הרטורית או ההבעתיות הפייטנית.

את הפסוק E "שום בן־אדם איננו בן־תמותה" אפשר לנסח מחדש ברציפות כך:

לגבי כל דבר שבעולם, אם הוא בן־אדם אין הוא בן־תמותה.
לגבי כל x שבעולם, אם x הוא בן־אדם הרי ש־x איננו בן־תמותה.

ולבסוף כך:

$$(x)[Bx \supset \sim Tx].$$

התרגום הסמלי הקודם מביע לא רק את הצורה המסורתית של E בשפת היום־יום, אלא גם דרכים שונות ומשונות לומר את אותו הדבר, כגון אלה: "אין שום B שהוא T", "שום דבר איננו B ו־T כאחד", "Bים לעולם אינם Tים", וכך הלאה.

באופן דומה, את הפסוק I "בני־אדם אחדים הם בני־תמותה" אפשר לנסח מחדש ברציפות כך:

ישנו לפחות דבר אחד שהוא בן־אדם ושהוא בן־תמותה.
יש לפחות x אחד כך ש־x הוא בן־אדם ו־x הוא בן־תמותה.

ואחר־כך:

$$(\exists x)[Bx \cdot Tx].$$

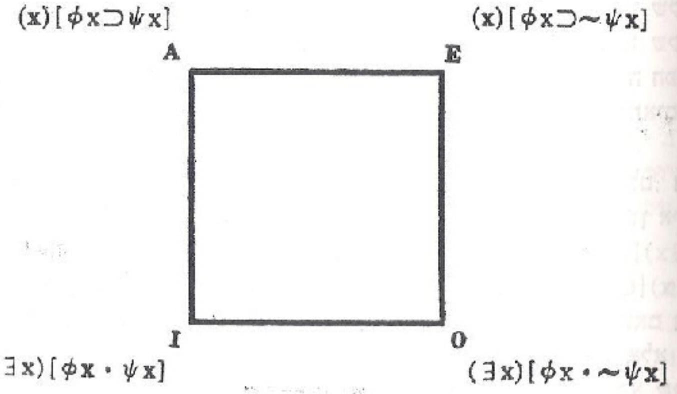
ולבסוף, הפסוק O "בני־אדם אחדים אינם בני־תמותה" מנוסח מחדש ברציפות כך:

ישנו לפחות דבר אחד שהוא בן־אדם אך איננו בן־תמותה.
יש לפחות x אחד כך ש־x הוא בן־אדם ו־x איננו בן־תמותה.

והוא מסומל בשלמותו כך:

$$(\exists x)[Bx \cdot \sim Tx].$$

כאשר האותיות היווניות פי ופסי משמשות לייצג פרדיקט כלשהו, אפשר לייצג את ארבעת הפסוקים הכלליים מן הסוג נושא־נשוא של הלוגיקה המסורתית במערך מרובע זה:



מאלה, A ו־O הם "סותרים", שכן כל אחד הוא שלילתו של זולתו; E ו־I גם הם סותרים זה את זה.

אפשר לחשוב כי פסוק I נובע מפסוק A המתאים לו, ופסוק O מפסוק E המתאים לו; אך אין הדבר כן. פסוק A עשוי בהחלט להיות אמיתי בעת שפסוק I המתאים לו הוא שקרי. כאשר ϕx הוא פונקציה פסוקית שאין לה מקרי הצבה אמיתיים, הרי שיהיו אשר יהיו סוגי מקרי ההצבה של הפונקציה הפסוקית ψx, הכימות הכולל של הפונקציה הפסוקית (המורכבת) $\phi x \supset \psi x$ יהיה אמיתי. למשל, התבונן בפונקציה הפסוקית "x הוא צנטאור", שאותה נסמן בקיצור Cx. הואיל ואין צנטאורים, כל מקרה הצבה של Cx הוא שקרי, דהיינו — Ca, Cb, Cc, ... וכולי, כולם שקריים. לכן כל מקרה הצבה של הפונקציה הפסוקית המורכבת $Cx \supset Yx$ יהיה פסוק תנאי אשר הרישא שלו היא שקרית. מקרי ההצבה $Ca \supset Ya$, $Cb \supset Yb$, $Cc \supset Yc$, ... וכולי, כולם אמיתיים, שכן כל פסוק תנאי הטוען אימפליקציה מטריאלית מן ההכרח שיהא אמיתי אם הרישא שלו שקרית. הואיל וכל מקרי ההצבה שלה אמי־תיים, הכימות הכולל של הפונקציה הפסוקית $Cx \supset Yx$, שהוא הפסוק A $(x)[Cx \supset Yx]$, הינו אמיתי. אולם פסוק I המתאים, $(\exists x)[Cx \cdot Yx]$, הוא שקרי, שכן לפונקציה הפסוקית $Cx \cdot Yx$ אין שום מקרה הצבה שהוא אמיתי. העובדה שלביטוי $Cx \cdot Yx$ אין שום מקרה הצבה אמיתי, נובעת מן העובדה כי ל־Cx אין שום מקרה הצבה אמיתי. מקרי ההצבה השונים של $Cx \cdot Yx$ הם: $Ca \cdot Ya$, $Cb \cdot Yb$, $Cc \cdot Yc$, ... וכולי, שכל אחד מהם קוניונקציה אשר אחד מאיבריה הוא שקרי, שכן Ca, Cb, Cc, ... וכולי, הם כולם שקריים. הואיל וכל מקרי ההצבה שלה הם שקריים, הכימות היישי של הפונקציה הפסוקית $Cx \cdot Yx$, שהוא הפסוק I $(\exists x)[Cx \cdot Yx]$, הינו שקרי. מכאן, שפסוק A עשוי להיות אמיתי בעוד פסוק I המתאים לו הוא שקרי. אם בדיון הקודם, במקום הפונקציה הפסוקית Yx נציב את הפונקציה הפסו־קית $\sim Yx$, נוכיח כי פסוק E עשוי להיות אמיתי בעת שפסוק O המתאים לו הינו שקרי.

אם נניח את ההנחה הכללית כי קיים לפחות יחיד אחד בעולם, הרי ש־$(x)[Cx \supset Yx]$ אמנם גורר $(\exists x)[Cx \supset Yx]$. אולם הביטוי האחרון איננו פסוק I. הפסוק I "צנטאורים אחדים הם יפים" מסומל כ־$(\exists x)[Cx \cdot Yx]$, הטוען כי קיים לפחות צנטאור אחד. אולם מה שמסומל כ־$(\exists x)[Cx \supset Yx]$ יכול להיות מובע בשפת יום־יום כך: "קיים לפחות דבר אחד כך שאם הוא צנטאור הרי שהוא יפה". אין ביטוי זה טוען כי קיים צנטאור, אלא רק שקיים יחיד אשר או שאיננו צנטאור או שהוא יפה. ופסוק זה יהא שקרי

רק בשני מקרים אפשריים: ראשית, אלמלא היו יחידים כלל; ושנית, אילו כל היחידים היו צנטאורים, אך שום יחיד מהם לא היה יפה. אנו מוחקים את המקרה הראשון בהניחנו את ההנחה המפורשת (והאמיתית בברור) כי קיים לפחות יחיד אחד בעולם. והמקרה השני הוא לא־סביר באופן כה קיצוני, שכל פסוק בעל הצורה $(\exists x)[\phi x \supset \psi x]$ חייב להיות פחות־ערך לחלוטין — בניגוד לצורת I המשמעותית $(\exists x)[\phi x \cdot \psi x]$.

הנזכר לעיל חייב להבהיר שאם כי בשפת היום־יום הפסוקים A ו־I "כל בני־אדם הם בני־תמותה" ו"בני־אדם אחדים הם בני־תמותה" נבדלים זה מזה רק במלים "כל" ו"אחדים", בכל זאת ההבדל במשמעותם איננו מצטמצם לעניין הכימות הכולל כנגד הכימות היישי, אלא מעמיק יותר. הפונקציות הפסוקיות שכומתו כדי להביא לידי פסוקי A ו־I לא רק שכומתו באופן שונה — הן פונקציות שונות זו מזו, האחת מכילה '$\supset$', האחרת — '$\cdot$'. במלים אחרות, פסוקי A ו־I אינם כה דומים זה לזה כפי שנראה בשפת היום־יום. הבדליהם מובלטים באופן ברור מאוד בסימון החדש של פונקציות פסוקיות וכמתים.

בטרם נפנה לנושא ההיסקים המכילים פסוקים לא־מורכבים, על הקורא לרכוש ניסיון מסויים בתרגום פסוקים לא־מורכבים משפת היום־יום לשפת הסמלים הלוגית שלנו. לשפת היום־יום יש כה הרבה מבנים חריגים או אידיאומטיים, שאין חוקים פשוטים לתרגום פסוק משפת היום־יום לסימון הלוגי. מה שנדרש בכל מקרה הוא, שמשמעותו של הפסוק תהא מובנת ואחר־כך תובע מחדש במונחי פונקציות פסוקיות וכמתים.

תרגילים

I. תרגם כל אחד מן הפסוקים הללו למושגים הלוגיים של פונקציות פסוקיות וכמתים, בהשתמשך בכל מקרה בקיצורים המוצעים כאן, ובהקפידך בכך שכל נוסחה תתחיל בכמת ולא בסימן השלילה.

* 1. עטלפים הם יונקים. (Ax: x הוא עטלף; Yx: x הוא יונק).
2. דרורים אינם יונקים. (Dx: x הוא דרור; Yx: x הוא יונק).
3. גברות נוכחות. (Gx: x הוא גברת; Nx: x הוא נוכחות).
4. ג'נטלמנים הם תמיד עדינים. (Gx: x הוא ג'נטלמן; Ax: x הוא עדין).

* 5. ג׳נטלמנים אינם תמיד עשירים. (Gx : x הוא ג׳נטלמן; Ax : x הוא עשיר).
6. שגרירים הם תמיד מכובדים. (Sx : x הוא שגריר; Mx : x הוא מכובד).
7. שום צופה איננו מרמה לעולם. (Cx : x הוא צופה; Mx : x הוא מרמה).
8. רק רופאים מורשים יכולים לקבל על עצמם אחריות לטיפול רפואי. (Rx : x הוא רופא מורשה; Tx : x הוא אחריות לטיפול רפואי).
9. הכשות נחש הן לעתים פטליות. (Nx : x הוא הכשת נחש; Fx : x הוא פטלי).
* 10. ההצטננות הרגילה לעולם איננה פטלית. (Hx : x הוא הצטננות רגילה; Fx : x הוא פטלי).
11. ילד הצביע באצבעו לעבר הקיסר. (Yx : x הוא ילד; Hx : x הוא הצביע באצבעו לעבר הקיסר).
12. לא כל הילדים הצביעו באצבעם לעבר הקיסר (כבשאלה הקודמת).
13. לא כל הנוצץ הוא זהב. (Nx : x הוא נוצץ; Zx : x הוא זהב).
14. רק האמיצים ראויים לתהילה. (Ax : x הוא אמיץ; Rx : x הוא ראוי לתהילה).
* 15. רק אזרחים אמריקאיים רשאים להצביע בבחירות בארצות-הברית. (Ex : x הוא אזרח אמריקאי; Rx : x הוא רשאי להצביע בבחירות בארצות-הברית).
16. אזרחים אמריקאיים רשאים להצביע רק בבחירות בארצות-הברית. (Bx : x הוא בחירות שבהן אזרחים אמריקאיים רשאים להצביע; Ax : x הוא בחירות בארצות-הברית).
17. יש מדינאים הגונים. (Hx : x הוא הגון; Mx : x הוא מדינאי).
18. לא כל מועמד נתקבל לעבודה. (Mx : x הוא מועמד; Nx : x הוא נתקבל לעבודה).
19. שום מועמד לא נתקבל לעבודה (כבשאלה הקודמת).
20. שום דבר בעל-חשיבות לא נאמר. (Bx : x הוא בעל חשיבות; Nx : x הוא נאמר).

II. נסח מחדש כל אחד מהביטויים הללו עם כמת במקום סימן השלילה:

* 1. $\sim(x)[Ax \supset Bx]$
2. $\sim(x)[Cx \supset \sim Dx]$
3. $\sim(\exists x)[Ex \cdot Fx]$
4. $\sim(\exists x)[Gx \cdot \sim Hx]$
* 5. $\sim(x)[\sim Ix \vee Jx]$
6. $\sim(x)[\sim Kx \vee \sim Lx]$
7. $\sim(\exists x)[\sim(Mx \vee Nx)]$
8. $\sim(\exists x)[\sim(Ox \vee \sim Px)]$
9. $\sim(\exists x)[\sim(\sim Qx \vee Rx)]$
10. $\sim(x)[\sim(Sx \cdot \sim Tx)]$
11. $\sim(x)[\sim(\sim Ux \cdot \sim Vx)]$
12. $\sim(\exists x)[\sim(\sim Wx \vee \sim Xx)]$

IV. הוכחת תקפות

אם ברצוננו לבנות הוכחות צורניות לתקפותם של ארגומנטים אשר תקפותם תלויה במבנים פנימיים של פסוקים לא-מורכבים המופיעים בהם, אנו חייבים להרחיב את רשימת כללי ההיסק שלנו. דרושים רק ארבעה כללים נוספים, והם יוכנסו בקשר לארגומנטים אשר בשבילם הם דרושים. הבה נעיין בארגומנט הראשון שצוטט בפרק זה: ״כל האנשים הם בני-תמותה. סוקרטס הוא בן-אדם. לכן סוקרטס הוא בן-תמותה״. הוא מסומל כך:

$$(x)[Bx \supset Tx]$$
$$Bs$$
$$\therefore Ts$$

ההקדמה הראשונה טוענת את אמיתותו של הכימות הכולל של הפונקציה הפסוקית $Bx \supset Tx$. הואיל והכימות הכולל של הפונקציה הפסוקית הוא אמיתי אם ורק אם כל מקרי ההצבה שלו הם אמיתיים, נוכל להסיק מן ההקדמה הראשונה כל מקרה הצבה רצוי של הפונקציה הפסוקית $Bx \supset Tx$. במיוחד אנו יכולים להסיק את מקרה ההצבה $Bs \supset Ts$. ממנו ומן ההקדמה השנייה Bs, נגררת המסקנה Ts ישירות במודוס פוננס.

אם נוסיף לרשימת כללי ההיסק שלנו את העיקרון שכל מקרה הצבה של פונקציה פסוקית יכול להיות מוסק באופן תקף מן הכימות הכולל שלה, הרי שבאפשרותנו לתת הוכחה צורנית לתקפותו של הארגומנט הנתון בהסתמכנו על הרשימה המורחבת של דפוסי הטיעון התקפים היסודיים. כלל היסק חדש זה הוא עיקרון ההמחשה הכוללת[5], והוא מסומן בקיצור ״UI״. בהשתמשנו

5. כלל זה ושלושת הבאים אחריו הם גירסות שונות של כללי ״הדדוקציה הטבעית״, אשר גרהרד גנצן וסטניסלב יסקובסקי ניסחו אותם בשנת 1934 — כל אחד באופן עצמאי.