תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2)+...+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \geq 2$.
ב. $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$.
פתרון:

א. נוכיח באינדוקציה. עבור $n=2$, ידוע, מהגדרת מטריקה.

נניח נכונות עבור $n=k$, ונוכיח עבור $n=k+1$. ובכן, $d(x_1,x_{k+1}) \leq d(x_1,x_k)+d(x_k,x_{k+1}) \leq d(x_1,x_2)+...+d(x_{k-1},x_k)+d(x_k,x_{k+1})$ (מהנחת האינדוקציה).

ב. שקול להוכיח: $-d(x,y) \leq d(x,z)-d(y,z) \leq d(x,y)$.

צד ימין נובע מכך ש: $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

צד שמאל נובע מכך ש: $d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z)$.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d: X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.
פתרון:

$d(x,y)=0 \iff (x,y)=0$ נובע ישירות מההגדרה.

סימטריות: טירוויאלי.

אי"ש המשולש: יהיו x,y,z 3 סדרות בX. אם שתיים מהן שוות אז האי שוויון טריוויאלי. אז נניח ש $x \neq y, x \neq z, y \neq z$. נסמן $j=\min\{i : x_i \neq y_i\}, k=\min\{i : y_i \neq z_i\}$. אז $\min\{i : x_i \neq z_i\} \geq \min\{j,k\}$. הסבר: אם $t<j,k$ אז $x_t=y_t \wedge y_t=z_t \implies x_t=z_t$. לכן: $d(x,z)=\dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq z_i\}} \leq \dfrac{1}{\min\{j,k\}}=\max\{\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{k}\}=\max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

3. תהי $d: X \times X \to \mathbb{R}$ פו' שמקיימת:
א. $d(x,y)=0 \iff x=y$
ב. $d(y,x) \leq d(z,y)+d(z,x)$ לכל $x,y,z \in X$.
הוכיחו שd היא מטריקה על X.
פתרון:

סימטריות: נציב $z=x$. $d(y,x)\le d(x,y)+d(x,x)=d(x,y)+0=d(x,y)$.
באופן דומה אפשר להראות ש $d(x,y)\le d(y,x)$. לכן $d(x,y)=d(y,x)$.

סימטריות+ תכונה ב' גורר את אי שוויון המשולש.

כעת, נוכיח ש $d(x,y)\ge 0$. $0=d(x,x)\le d(x,y)+d(y,x)=2d(x,y)$. נחלק ב2 ונקבל את המבוקש.

4. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d((x,y),(x',y'))=\min\{d(x,x'),d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$.
ב. $d((x,y),(x',y'))=|x|+|y|+|x'|+|y'|$ על $\mathbb{R}^2$.
ג. $d((x,y),(x',y'))=d(x,x')+d(y,y')$ על $X\times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.
פתרון:

א. הפרכה: $(0,0)\neq(0,1)$ אבל $d((0,0),(0,1))=\min\{0,1\}=0$.

ב. הפרכה: $(0,1)=(0,1)$ אבל $d((0,1),(0,1))=2$.

ג. הוכחה: ראשית, יש להראות שהפו' הולכת לתוך $[0,\infty)$. זה נובע מכך ש $d(x,x'),d(y,y')\ge 0$, וסכום של מספרים אי שליליים הוא אי שלילי.

$d((x,y),(x',y'))=0 \iff d(x,x')+d(y,y')=0$. בגלל ש$d$ מטריקה, $d(x,x'),d(y,y')\ge 0$. לכן זה שקול לכך ש $d(x,x')=0\wedge d(y,y')=0$ וזה קורה אמ"ם $x=x'\wedge y=y'$. כלומר $(x,y)=(x',y')$.

סימטריות: $d((x,y),(x',y'))=d(x,x')+d(y,y')=d(x',x)+d(y',y)=d((x',y'),(x,y))$.

אי"ש המשולש: $d((x,y),(x',y'))=d(x,x')+d(y,y')\le d(x,x'')+d(x'',x')+d(y,y'')+d(y'',y')=d((x,y),(x'',y''))+d((x'',x'),(y'',y'))$.

5. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y)=\max\{i:p^i|(x-y)\}$ ו $d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$.
א. הוכיחו: $p^n\to 0$ במטריקה הp- אדית.
ב. תארו את הכדור $B_{d_7}(3,\dfrac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z},d_7)$.
ג. עבור $z\in\mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$.
פתרון:

א. $d_p(p^n,0)=\dfrac{1}{p^n}\to 0$. לכן $p^n\to 0$

ב. $z\in B(3,\dfrac{1}{49}) \iff d(3,z)\le\dfrac{1}{49} \iff z=3\vee k(3,z)\ge 2 \iff z=3\vee z=3+49x$. כלומר, $B(3,\dfrac{1}{49})=3+49\mathbb{Z}$

6. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1,x_2\in X$ ו $r_1,r_2>0$, ונניח ש $p\in B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$. נסמן $r=\min\{r_1-d(x_1,p),r_2-d(x_2,p)\}$. הוכיחו ש $B(p,r)\subseteq B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$.
פתרון:

יהי $y \in B(p,r)$. כלומר, $d(y,p) \leq r$. מאי שוויון המשולש, $d(y,x_1) \leq d(y,p) +$ $d(p,x_1) \leq r_1 - d(x_1,p) + d(x_1,p) = r_1$. לכן $y \in B(p,r)$. כנ"ל לגבי $B(x_2,r_2)$.

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרח מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x \in X$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$, כך ש $x_n = x \ \forall n \geq n_0$.
א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.
פתרון:

א. נזכיר כי במרחב מטרי $x_n \to x$ אמ"ם $d(x_n,x) \to 0$.

ובכן, נוכיח שאם $\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x, אז הסדרה מתכנסת לx. אכן, החל ממקום מסויים $d(x_n,x) = d(x,x) = 0$. לכן $d(x_n,x) \to 0$.

ב. במטריקה הדיסקרטית המרחקים הם 0 או 1. לכן אם $d(x_n,x) \to 0$, זה אומר שהחל ממקום מסויים $d(x_n,x) = 0$. כלומר, $x_n = x$.

8. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, ...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.
פתרון:

נוכיח שהסדרה מתכנסת ל$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$.

הוכחה: $d_\infty((\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, ...), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)) = \sup(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ...) =$ $\frac{1}{n} \to 0$.

9. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\} \subseteq Y$, ו $x \in Y$, $x_n \to x$ לפי τ, אמ"ם $x_n \to x$ לפי τ_Y.
ב. נסתכל על הסדרה $x_n = \frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\} \subseteq X$.
ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.
פתרון:

א. אם $x_n, x \in Y$, אז $\tau(x_n,x) = \tau_Y(x_n,x)$, מהגדרת המטריקה המושרית. לכן $\tau(x_n,x) \to 0 \iff \tau_Y(x_n,x) \to 0$.

ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a,b \in \mathbb{Z}$ כך ש $\frac{a}{b} = \frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. אז $bn + b\sqrt{2} = bn - an \Longleftarrow (b+a)\sqrt{2} = bn - an \Longleftarrow \sqrt{2} = \frac{bn-an}{b+a}$ $b(n+\sqrt{2}) = a(n-\sqrt{2}) \Longleftarrow an - a\sqrt{2}$. כלומר, $\sqrt{2}$ רציונלי, וזאת כמובן סתירה.

ג. נניח ש $x_n \to x$ ב X. אז $x_n \to x$ גם ב $\mathbb{R}$. אבל ידוע ש $x_n \to 1$ ב$\mathbb{R}$. ו$x \neq 1$, כי $1 \notin X$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

שאלת אתגר: הראו שאם $(X, ||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1,r_1), B(a_2 r_2)$ כך ש $r_1 < r_2$ וגם $B(a_2,r_2) \subseteq B(a_1,r_1)$.

פתרון:

נניח $a_2 \neq a_1$ $r_2 < r_1$, ונניח בשלילה שמתקיים $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$. אזי $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2) \in a_2$ ולכן $||a_2 - a_1|| < r_1$. יהי $v = a_1 + r_1 \frac{a_2 - a_1}{||a_2 - a_1||}$.
מתקיים:

$$||v - a_2|| = ||a_1 + r_1 \frac{a_2 - a_1}{||a_2 - a_1||} - a_2|| = ||(a_2 - a_1)(\frac{r_1}{||a_2 - a_1||} - 1)|| =$$

$$= ||a_2 - a_1|| \cdot |\frac{r_1 - ||a_2 - a_1||}{||a_2 - a_1||}| = |r_1 - ||a_2 - a_1||| = r_1 - ||a_1 - a_2|| < r_1 < r_2$$

לכן $v \in B(a_2, r_2)$. אבל $||v - a_1|| = ||r_1 \frac{a_2 - a_1}{||a_2 - a_1||}|| = r_1$, ולכן $v \notin B(a_1, r_1)$. סתירה.