**שאלה 1**

**א.** יהי $g=(1\,2\,3)\in S_4$. מצא את כל האיברים של $C_{S_4}(g)$.

**ב.** יהי $g=(1\,2\,3)\in S_5$. מצא את כל האיברים של $C_{S_5}(g)$.

**תשובה:** א) $C_{S_4}(g)=\{h\in S_4 : hg=gh\}=\{h\in S_4 : hgh^{-1}=g\}$ הינו המייצב של $g$
עבור הפעולה של $G$ על עצמה על ידי הצמדה. המסלול של
$g$ הינו מחלקת הצמידות שלו, שמורכב מכל המחזורים ב-$S_4$ עם
אותו מבנה מחזורי כמו $g$, כלומר מכל המחזורים מאורך 3. יש
$\binom{4}{3}\cdot 2=8$ כאלה ( $\binom{4}{3}$ דרכים לבחור את שלושת המספרים הנכנסים
למחזור, ושני סדרים אפשריים בתוך המחזור). לפי משפט מסלול-
מייצב, $|S_4 * g| = \frac{|S_4|}{|C_{S_4}(g)|} \Leftarrow 8=\frac{24}{|C_{S_4}(g)|} \Leftarrow$

$|C_{S_4}(g)|=3$. אך $\langle g\rangle \le C_{S_4}(g)$, כי $\langle g\rangle$ חבורה אבלית שמכילה את $g$,
וגם $|\langle g\rangle|=o(g)=3$. לכן $C_{S_4}(g)=\langle g\rangle=\{e,\underset{g}{(1\,2\,3)},\underset{g^2}{(1\,3\,2)}\}$.

<u>פתרון אחר</u> $\sigma\in C_{S_4}(g) \Leftrightarrow \sigma g\sigma^{-1}=g \quad = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))$. כיוון שניתן
לרשום את המחזור $g=(1\,2\,3)=(2\,3\,1)=(3\,1\,2)$ בשלוש דרכים, יש
שלוש אפשרויות:

I) $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=2$, $\sigma(3)=3$ זה משאיר רק אופציה אחת עבור $\sigma(4)$, כלומר $\sigma(4)=4$.
לכן במקרה הזה $\sigma=e$.

II) $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=1$ כנ"ל בהכרח $\sigma(4)=4$, ולכן $\sigma=(1\,2\,3)$.

III) $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=1$, $\sigma(3)=2$ כנ"ל בהכרח $\sigma(4)=4$, ולכן $\sigma=(1\,3\,2)$.

ושוב קיבלנו $C_{S_4}(g)=\{e,(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$.

ג) מספר המחזורים מאורך 3 ב-$S_5$ הינו $\binom{5}{3}\cdot 2 = 20$. לכן

$|C_{S_5}(g)|=6 \Leftarrow 20=\frac{|S_5|}{|C_{S_5}(g)|}=\frac{120}{|C_{S_5}(g)|}$. נשים לב כי שלושת האיברים של $\langle g\rangle$ מתחלפים עם $g$, ובנוסף $(4\ 5)$ מתחלף עם $g=(1\ 2\ 3)$ כי הם מחזורים זרים. הוכחנו בשיעור כי $C_{S_5}(g)$ תת-חבורה של $S_5$, לכן סגור לכפל. זה אומר כי $(1\ 3\ 2)(4\ 5), (1\ 2\ 3)(4\ 5) \in C_{S_5}(g)$. וכבר מצאנו ששה איברים של $C_{S_5}(g)$ לכן את כולם. קיבלנו

$$C_{S_5}(g)=\{e,\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (4\ 5),\ (1\ 2\ 3)(4\ 5),\ (1\ 3\ 2)(4\ 5)\}.$$

(האיברים האלה כולם שונים, כי אפשר לכתוב כל תמורה באופן יחיד כמכפלה של מחזורים זרים, עד כדי שינוי סדר הגורמים).

<u>פתרון אחר</u> כמו בסעיף הקודם, מקבלים שלוש אפשרויות עבור $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$, ללא הגבלה נוספת על $\sigma(4), \sigma(5)$. זה מאפשר שני אופציות

בכל מקרה: $\sigma(4)=4,\ \sigma(5)=5$ וגם $\sigma(4)=5,\ \sigma(5)=4$. לכן מקבלים:

I) $\sigma(1)=1,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=3 \Leftarrow$ $\sigma=e$ או $\sigma=(4\ 5)$.

II) $\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=1 \Leftarrow$ $\sigma=(1\ 2\ 3)$ או $\sigma=(1\ 2\ 3)(4\ 5)$.

III) $\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=1,\ \sigma(3)=2 \Leftarrow$ $\sigma=(1\ 3\ 2)$ או $\sigma=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$,

והמרכז המבוקש הינו

$$C_{S_5}(g)=\{e,\ (4\ 5),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 2\ 3)(4\ 5),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 3\ 2)(4\ 5)\}.$$

**שאלה 2**

**תהי $G$ חבורה בעלת סדר 105. הוכח שיש לה תת־חבורה 3־סילו נורמלית או תת־חבורה 7־סילו נורמלית.**

**תשובה:** נניח בשלילה שאין תח"ח 3-סילו או 7-סילו נורמלית. לפי משפט סילו 2, זה אומר $n_3 \neq 1$, $n_7 \neq 1$. כיוון ש- $105 = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, מסיקים ממשפט סילו 3 כי:

$n_3 | 35$

$n_3 \equiv 1 \mod 3$

$\Rightarrow n_3 \in \{\cancel{1}, \cancel{5}, 7, \cancel{35}\} \Rightarrow n_3 = 7$.

הנחנו $n_3 \neq 1$ ; לא $1 \mod 3$

$n_7 | 15$

$n_7 \equiv 1 \mod 7$

$\Rightarrow n_7 \in \{\cancel{1}, \cancel{3}, \cancel{5}, 15\} \Rightarrow n_7 = 15$.

הנחנו $n_7 \neq 1$ ; לא $1 \mod 7$

כל תח"ח 7-סילו הינה מסדר 7. לפי לגרנז', כל איבר בחבורה כזאת הינו מסדר 1 או 7, כלומר יש 6 איברים מסדר 7 ועוד איבר היחידה. אם $P_i, P_j$ שני תח"ח 7-סילו שונות, אז לפי לגרנז' $|P_i \cap P_j| \in \{1, 7\}$. אם $|P_i \cap P_j| = 7$ אז $P_i = P_i \cap P_j = P_j$ בסתירה לשונות של $P_i, P_j$. לכן $P_i \cap P_j = \{e\}$ וכל איבר מסדר 7 מופיע רק בתח"ח 7-סילו אחת. לכן יש ב-$G$ $15 \cdot 6 = 90$ איברים מסדר 7.

<u>הערה</u> (בשני השימושים של לגרנז' השתמשנו בכך שהסדר של כל תח"ח 7-סילו הינו ראשוני. אם הסדר שלהן היה 49, לא היינו יכולים להסיק מיד שהחיתוכים טריוויאליים. תשובה שהסתמכה בטריוויאליות החיתוכים ללא נימוק מספק הפסידה נקודות.)

כמו כן, כל תח"ח 3-סילו הינה מסדר ראשוני 3. כל אחת מכילה שני איברים מסדר 3, וכמו למעלה כל איבר כזה מופיע רק בתח"ח 3-סילו אחת. לכן ב-$G$ יש $7 \cdot 2 = 14$ איברים מסדר 3. בנוסף יש איבר היחידה מסדר 1. מצאנו $90 + 14 + 1 = 105$ איברים מסדרים 1, 3, 7, כלומר כל איבר של $G$ הינו מאחד הסדרים האלה. אבל $5 | 105$ ולכן לפי משפט קושי יש איבר מסדר 5 וקיבלנו סתירה.

**שאלה 3**

**תהי $G$ חבורה נילפוטנטית מסדר $5780 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17^2$. הוכח שהיא אבלית.**

**תשובה:** הוכחנו בשיעור שכל תג"ח p-סילו של חבורה נילפוטנטית סופית $G$ הינה נורמלית (ולכן יחידה), וכי $G$ הינה איזומורפית למכפלה ישרה של התג"ח p-סילו שלה. לכן $G \simeq P_2 \times P_5 \times P_{17}$ כאשר $P_2, P_5, P_{17}$ הן התג"ח 17-סילו, 5-סילו, 2-סילו בהתאמה.

נשים לב כי $|P_5| = 5$, וכל חבורה מסדר ראשוני הינה ציקלית ולכן אבלית. בנוסף, $|P_2| = 2^2$, $|P_{17}| = 17^2$, והוכחנו בשיעור שכל חבורה מסדר $p^2$, כאשר $p$ ראשוני, הינה אבלית.

לכן $P_2, P_5, P_{17}$ שלושתן אבליות. המכפלה הישרה $P_2 \times P_5 \times P_{17}$ גם כן אבלית:

$$\underbrace{(g_2, g_5, g_{17})}_{\in P_2 \times P_5 \times P_{17}}(h_2, h_5, h_{17}) = (g_2h_2, g_5h_5, g_{17}h_{17}) = (h_2g_2, h_5g_5, h_{17}g_{17}) = (h_2, h_5, h_{17})(g_2, g_5, g_{17}).$$

לכן $G$ אבלית.

**שאלה 4**

**א.** נתונה פעולה של החבורה $G=\mathbb{Z}$ על קבוצה $A$. הוכח שקיימים מסלולים אינסופיים אם ורק אם קיים איבר $a\in A$ עבורו מתקיים $G_a=\{e\}$.

**ב.** מצא פעולה של חבורה $G$ על קבוצה $A$ שיש לה מסלולים אינסופיים למרות שלכל $a\in A$ מתקיים $G_a\neq\{e\}$. רמז: יש דוגמא פשוטה עם $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

**תשובה:** א) הוכחנו בשיעור השני שהתת-חבורות של $\mathbb{Z}$ הינן $\{e\}=\langle 0\rangle$ והתת-חבורות $n\mathbb{Z}=\langle n\rangle$ עבור $n\in\mathbb{N}$. הוכחנו גם כי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_n$. לכן $[\mathbb{Z}:\{e\}]=|\mathbb{Z}|=\infty$ ו-$[\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}]=|\mathbb{Z}_n|=n$. כלומר, התת-חבורה היחידה של $\mathbb{Z}$ בעלת אינדקס אינסופי הינה $\{e\}$. עכשיו יהי $a\in A$ כלשהו. לפי משפט מסלול-מייצב, $|G*a|=[G:G_a]$. לכן המסלול $G*a$ אינסופי $\iff [\mathbb{Z}:G_a]=[G:G_a]=\infty$ $\iff G_a=\{e\}$.

שימו לב שההוכחה הזאת השתמשה במידע על המבנה של $\mathbb{Z}$. לחבורה $G$ שיש לה תת-חבורות לא-טריוויאליות מאינדקס אינסופי, ההוכחה לא עובדת.

ב) יש דוגמאות רבות. רוב התשובות ציינו את הפעולה של $G=GL_2(\mathbb{R})$ על $A=\mathbb{R}^2$ על ידי $M*v=Mv$ עבור $M\in GL_2(\mathbb{R})$ וקטור (עמודה) $v\in\mathbb{R}^2$. נבדוק שלכל $v=\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2$ יש מייצב לא-טריוויאלי:

אם $y=0$, אז $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in G_v$

אם $x=0$, אז $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\in G_v$

אם $x\neq0$, $y\neq0$, אז $\begin{pmatrix}0&\frac{x}{y}\\\frac{y}{x}&0\end{pmatrix}\in G_v$

אז לכל $v\in\mathbb{R}^2$ ראינו כי $G_v\neq\{e\}$.

אבל יש מסלול אינסופי. בשיעור כבר הוכחנו שזו פעולה ויש לה שני מסלולים: $\{\binom{0}{0}\}$ ו-$\mathbb{R}^2\setminus\{\binom{0}{0}\}$. אכן, אם $v_1,w_1\in\mathbb{R}^2$ וקטורים לא-אפסיים, אפשר להשלים אותם לבסיסים $\{v_1,v_2\}$, $\{w_1,w_2\}$ של $\mathbb{R}^2$. תהי $M$ המטריצה המייצגת להעתקה הלינארית (חח"ע ועל) $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(v_1)=w_1$, $\varphi(v_2)=w_2$. אז $M*v_1=w_1$,

כלומר $v_1,w_1$ שייכים לאותו מסלול, וברור שהמסלול הינו אינסופי.

**שאלה 5**

**תהי $G$ חבורה כלשהי ותהי $G' = [G,G]$ התת־חבורה הנגזרת שלה. תהי $\varphi : G \to G/G'$ ההטלה הטבעית: $\varphi(g) = gG'$ לכל $g \in G$. נתון הומומורפיזם $f : G \to K$, כאשר $K$ חבורה אבלית.**

**א.** **הוכח שקיים הומומורפיזם $h : G/G' \to K$ שמקיים $f = h \circ \varphi$.**

**ב.** **הוכח שההומומורפיזם $h$ מן הסעיף הקודם הינו יחיד.**

**תשובה:** כל מחלקה ב־ $G/G'$ הינה מן הצורה $gG'$ עבור נציג $g \in G$. אם קיים $h$ כמבוקש, אזי בהכרח $h(gG') = h(\varphi(g)) = f(g)$, וזה קובע את $h$ לגמרי. כלומר, אם $h$ קיים אז הוא יחיד. זה יטפל בסעיף ב'.

אז נבדוק שההעתקה $h : G/G' \to K$, $h(gG') = f(g)$ אכן הינה הומומורפיזם מוגדר היטב (כלומר, לא תלוי בבחירת הנציג $g$). לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $G/(\ker f) \cong f(G) \le K$. אך $K$ אבלית, לכן $G/(\ker f)$ אבלית, לכן $G' \le \ker f$ לפי משפט מן השיעור. (לחילופין, אפשר לשים לב שכל איבר $g \in G'$ הינו מכפלה של קומוטטורים $g = [a_1, b_1] \cdots [a_r, b_r]$ ולכן

$$f(g) = f(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1}) =$$
$$f(a_1) f(b_1) f(a_1)^{-1} f(b_1)^{-1} \cdots f(a_r) f(b_r) f(a_r)^{-1} f(b_r)^{-1} \overset{K \text{ אבלית}}{=}$$
$$f(a_1) f(a_1)^{-1} f(b_1) f(b_1)^{-1} \cdots f(a_r) f(a_r)^{-1} f(b_r) f(b_r)^{-1} =$$
$$e_K \cdot e_K \cdots e_K \cdot e_K = e_K$$

וגם מסיקים $G' \le \ker f$). בכל מקרה, אם $g_1 G' = g_2 G'$, אזי $f(g_1) = f(g_2) \Leftarrow f(g_1^{-1} g_2) = e_K \Leftarrow g_1^{-1} g_2 \in G' \le \ker f$ וההגדרה של $h(gG')$ אכן אינה תלויה בבחירה של הנציג של $gG'$. בנוסף,

$$h(g_1 G') \cdot h(g_2 G') = f(g_1) f(g_2) \underset{f \text{ הומ'}}{=} f(g_1 g_2) = h(g_1 g_2 G') = h(g_1 G' \cdot g_2 G')$$

ולכן $h : G/G' \to K$ הומומורפיזם. ברור מן ההגדרה כי $f = h \circ \varphi$, וכבר הוכחנו את היחידות של $h$.