תרגול 10 (השלמה אחרי הבוחן)

גבולות חד צדדיים

לעיתים נרצה להגדיר גבול רק מצד אחד, שכן, ישנן פונקציות (למשל) שאינן מוגדרות עבור $x<0$: $f(x)=\sqrt{x}$. לכן יש טעם להגדיר במקרה זה גבול רק מימין.

<u>הגדרה – לפי Cauchy</u>

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<x-x_0<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<x_0-x<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>הגדרה – לפי Heine</u>

תהי $\{x_n\}$ סדרה המקיימת $x_n\to x_0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $x_n>x_0$. אם לכל סדרה כזאת מתקיים $f(x_n)\to L$ אזי $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ (באופן דומה נגדיר גבול משמאל).

<u>משפט</u>

תהי f פונקציה. הגבול הדו-צדדי של f בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$ קיים אמ"מ הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים זה לזה. כלומר:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad for \quad L\in\overline{\mathbb{R}}.$$

<u>תרגיל</u>

חקרו את הגבולות החד-צדדיים ב-$x=3$ של הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}$.

<u>פתרון</u>

לא קיים הגבול $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ שכן הפונקציה אינה מוגדרת בסביבה מנוקבת שמאלית של $x=3$ (מכיוון שהיא לא מוגדרת עבור $|x|<3$).

לגבי הגבול מימין מתקיים:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}=\infty.$$

הסבר: $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x+3}=\sqrt{6}$, $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0^+$.

מש"ל

<u>משפט הסנדוויץ'</u>

יהיו $f(x),g(x),h(x)$ שלוש פונקציות המוגדרות בסביבה מסויימת של הנקודה $x=a$ (פרט אולי לנקודה a עצמה). נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $f(x)\le g(x)\le h(x)$ ונניח כי קיימים הגבולות $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}g(x)=L$.

<u>תרגיל</u>

חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\sin(1/x)}$.

<u>פתרון</u>

מתקיים $1=2-1\le 2+\sin(1/x)\le 2+1=3$ ולכן $1\ge\frac{1}{2+\sin(1/x)}\ge\frac{1}{3}$.

עבור $x>0$ מתקיים: $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2+\sin(1/x)}\le x$. כאשר $x\to 0^+$, שתי הפונקציות החיצוניות שואפות לאפס, ולכן גם הפונקציה במרכז שואפת לאפס. כלומר:
$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2+\sin(1/x)}=0$.

עבור $x<0$ מתקיים: $\frac{x}{3}\ge\frac{x}{2+\sin(1/x)}\ge x$ ובאופן דומה $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2+\sin(1/x)}=0$.

לכן הגבול של הפונקציה הוא אפס.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שהגבול הבא אינו קיים: $\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\sin(1/x)\right]$.

<u>פתרון</u>

נראה שלא קיים הגבול כאשר $x \to 0^+$. תהי $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\} \to 0^+$. מתקיים $\left[\frac{1}{\pi n} \cdot \sin(\pi n)\right] = 0$. תהי $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2\pi n + 3\pi/2}\right\} \to 0^+$. מתקיים $\left[\frac{1}{2\pi n + 3\pi/2} \cdot (-1)\right] = -1$.ולכן הגבול לא קיים.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיים הגבול ל- $f(x)$ בנקודה $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & x > 0 \\ \frac{x+5}{2x+a} & x < 0 \end{cases}.$$

<u>פתרון</u>

מתקיים $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3\sin(3x)}{3x} = 3$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x+5}{2x+a} = \frac{5}{a}$.

עלינו לדרוש $\frac{5}{a} = 3$ ומכאן נקבל $a = \frac{5}{3}$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

חשבו את הגבול $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$.

<u>פתרון</u>

נרצה לחלק את המונה והמכנה ב-x, אך יש לעשות זאת בזהירות. שימו לב: $\sqrt{x^2} = |x|$, וכאשר x שלילי מתקיים $\sqrt{x^2} = -x$. לכן:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

מש"ל