

השאלה היא: איך נפתר?

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx$$

פתרון

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) = 1$$

$$x=1 \Rightarrow 4A=1 \Rightarrow A=1/4$$

$$x=-1 \Rightarrow -4B=1 \Rightarrow B=-1/4$$

$$x=0 \Rightarrow A-B-D=1 \Rightarrow D=-1/2$$

$$\text{קודם } x^3 \Rightarrow A+B+C=0 \Rightarrow C=0$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 - \cos^2 x}} dx$$

זכרון:

החלפה: אם  $\cos x$  ו/או  $\sin x$  (מכאן)   
 החלפה:  $t = \cos x$  , ההצבה,  $t = \sin x$    
 (כאשר נצ'ק מה שהחלפה היא טובה.)

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 - \cos^2 x}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{2 - t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$t = \cos x$   
 $dt = -\sin x dx$

$s = \frac{t}{\sqrt{2}}$   
 $ds = \frac{1}{\sqrt{2}} dt$

$$= \boxed{-\arcsin\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

החלפה: אם  $\sin x, \cos x$  ו/או  $\sin^2 x, \cos^2 x$    
 נסה להשתמש בנוסחה  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  או  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx$$

זכרון:

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$        $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

זכרון:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{2 \sin x \cos x = \sin 2x} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

10:30 6 April, 2021

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \frac{1}{4} \sin^2 2x dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \underbrace{\sin^2 2x}_{(*)} - \underbrace{\cos 2x \sin^2 2x}_{(**)} dx$$

$$\int \sin^2 2x = \frac{1}{2} \int 1 - \cos 4x dx$$

(\*) שיטת חצי

$$= \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C$$

(\*\*) שיטת חצי

$$\int \cos 2x \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} + C$$

$$t = \sin 2x$$

$$dt = 2 \cos 2x$$

$$= \frac{\sin^3 2x}{6} + C$$

אכן נכון >

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + C$$

(רשע תיכלת מר) סיג

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x} + 1} = \int \frac{2t dt}{t^2 + t + 1}$$

$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt$$

מ'ע נ'ע נ'ע נ'ע נ'ע

$$= \int \frac{2t + 1 - 1}{t^2 + t + 1} dt = \int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} - \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$= \ln |t^2 + t + 1| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left( \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + C$$

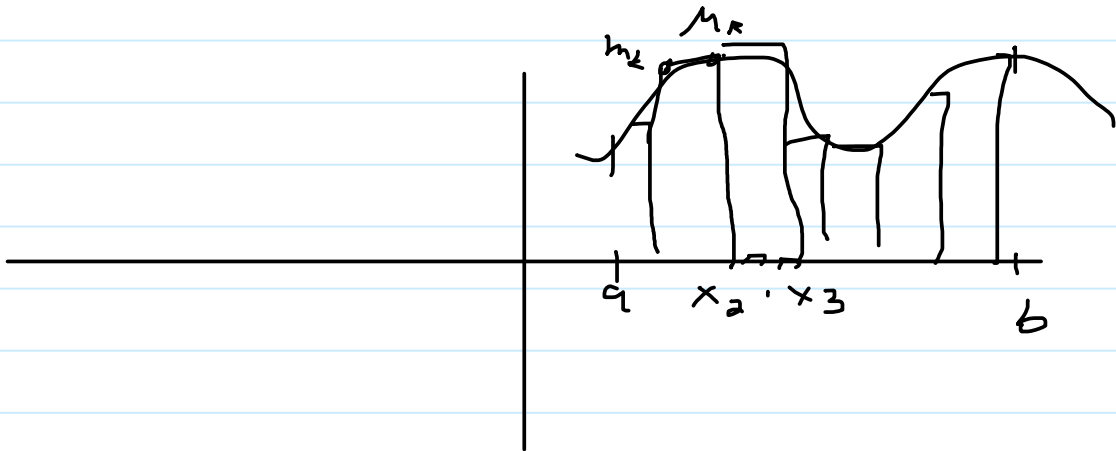
$$\star \int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$= \ln |x + \sqrt{x} + 1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{(\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2}{\sqrt{3}} \right) + C$$

# אינטגרל מסוים

10:48 6 April, 2021

המטרה! חישב מסה מתחת לזווה פונקציה



מסתכלים על מסוים לפי זווה:

המטרה: יהי  $f$  פונקציה מסוימת הקטל  $[a, b]$

יהי  $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

המטרה: על הקטל  $[a, b]$

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{[מ]}$$

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

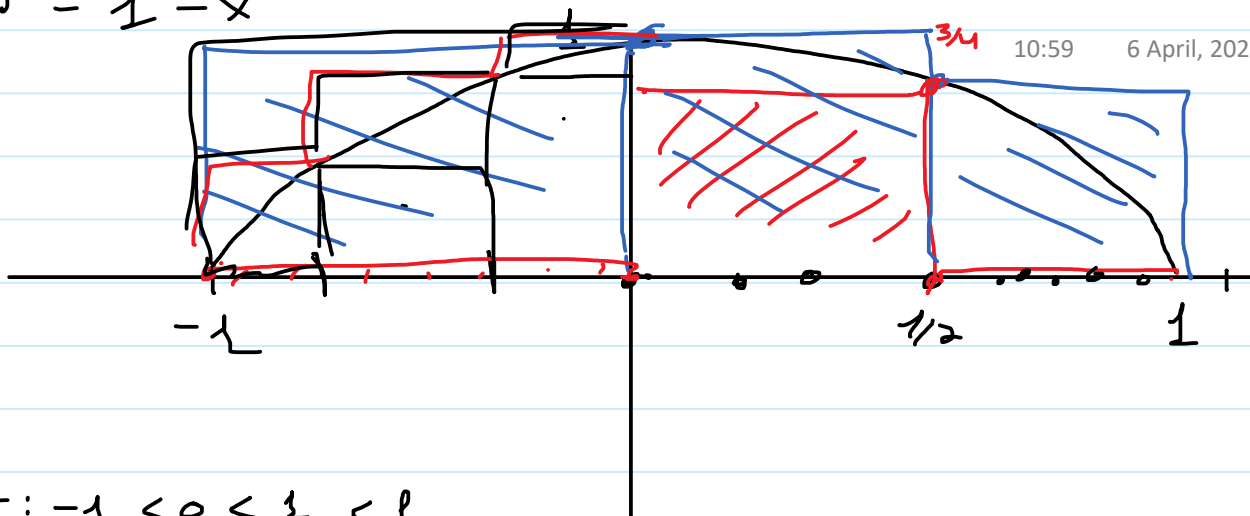
$$\overline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \text{[מ]}$$

$$\underline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

$$f = 1 - x^2$$

$$f(1/2) = 3/4$$

10:59 6 April, 2021



$$T: -1 < 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\underline{\Sigma}(f, T) = 0 + 1/2 \cdot 3/4 + 0$$

$$\overline{\Sigma}(f, T) = 1 + 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 3/4$$

הזכרה:

בה  $T$  חלוקה של הטל  $[a, b]$

קרא להחלקה  $T$  של הטל  $[a, b]$  חלוקה  $T$  של הטל  $[a, b]$  אם  $T$  מכילה את כל הנקודות של  $T$  ואולי עוד נקודות.

הזכרה:  $f$  פונקציה חסומה קטל  $[a, b]$

נסמן  $\bar{x}$  קדור  $\bar{x}$  סכומי זיקו האמצעי  $\bar{x}$

נסמן  $\underline{x}$  קדור  $\underline{x}$  סכומי זיקו האמצעי  $\underline{x}$

$$\int_a^b f = \inf \bar{x}$$

$$\int_a^b f = \sup \underline{x}$$

אם  $\int_a^b f = \int_a^b f$  אז  $f$  אינטגרלית.

משפט:  $f$  חנונה בקטל צפונה  
 אם  $\epsilon > 0$  אז קיים תאוקה  $\tau$  שיהיה

$$|\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau)| < \epsilon$$

משפט: יהי  $\tau$  תאוקה  $\tau$  על  $[a, b]$  ויהי  $\tau'$  תאוקה קטנה יותר מהתאוקה  $\tau$

$$\underline{S}(f, \tau) \leq \underline{S}(f, \tau')$$

$$\overline{S}(f, \tau') \leq \overline{S}(f, \tau)$$

$$\underline{S}(f, \tau) \leq \underline{S}(f, \tau') \leq \overline{S}(f, \tau') \leq \overline{S}(f, \tau)$$