בס"ד

תרגול מס' 11 בחשבון אינפי' 2

עוד שאלות על התכנסות במידה שווה של סדרות וטורי פונקציות

תזכורת: תהא $f_k(x)$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$. אם הטור $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס (נקודתית) בקטע $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$, אזי:

$S'(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ (נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות).

תרגיל: הראה כי הפונקציה $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$ גזירה אינסוף פעמים.

פתרון: קל לראות כי טור הפונקציות מתכנס נקודתית בכל $\mathbb{R}$ ובאמצעות מבחן ה- M של ויירשטראס כי טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos(2^n x)}{n!}$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$. זה נכון לכל סדר גזירה ולכן עפ"י המשפט:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{nk}\sin^{(k)}(2^n x)}{n!}.$$

תרגיל: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ שני טורי חזקות עם רדיוסי התכנסות R_1 ו- R_2 בהתאמה, ונתון: $R_2<R_1$. הוכח כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הוא R_2.

פתרון: בתחום $|x|<R_2$ שני הטורים מתכנסים בהחלט ולכן ניתן להחליף שם את סדר הסכימה:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ומכאן שגם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ מתכנס שם בהחלט.

בתחום $R_2<|x|<R_1$, נניח בשלילה כי סכום שני הטורים מתכנס. כיוון שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בהחלט ניתן להחסיר את סכומו ולקבל שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ מתכנס, בסתירה לתכונה של טור חזקות שמתבדר עבור $|x|$ שגדול מרדיוס ההתכנסות שלו. מכאן שבהכרח סכום הטורים מתבדר שם, ולכן בכל סדר סכימה הסכום שלהם יתבדר, בפרט הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ מתבדר. בתחום $|x|>R_1$ לא יתכן שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ יחזור להתכנס שכן זהו טור חזקות סביב האפס וככזה תחום ההתכנסות שלו (<u>לא כולל הקצוות</u>) הוא תמיד מהצורה: $|x|<R$. מסקנה: הרדיוס של $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הוא R_2.

תרגיל: תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x>0$ כך ש: $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ אך f אינה שווה זהותית לאפס בקטע $(0,\infty)$. נגדיר סדרת פונקציות: $f_n(x)=f(nx)$. לאיזו פונקצית גבול היא מתכנסת? האם ההתכנסות היא במידה שווה?

פתרון: תחילה נחשב את פונקצית הגבול: $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f(nx)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

<u>טענה</u>: ההתכנסות לאפס היא אינה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>: כיוון שהפונקציה אינה שווה זהותית לאפס, קיימת לפחות נקודה אחת $x_0>0$ בה: $f(x_0)\neq 0$.

כעת אם ניקח למשל עבור כל $n\in\mathbb{N}$ את הנקודה $x_n=\frac{x_0}{n}$ נקבל:

$$f_n(x_n)=f_n\left(\frac{x_0}{n}\right)=f(x_0)\xrightarrow{n\to\infty}f(x_0)\neq 0$$

ובפרט תנאי ה- $\limsup$ אינו מתקיים.

תרגיל: א. תהא הפונקציה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$. הראה כי האינטגרל $\int_0^{\infty}f(x)dx$ מתכנס.

ב. קבע היכן טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ מתכנס במידה שווה.

פתרון:

א. לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $\frac{1}{n^4+x^2}\le\frac{1}{n^4}$ וטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ מתכנס.

לכן עפ"י משפט ה-M של ויירשטראס טור הפונקציות מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

אם כן ניתן בכל קטע להחליף את סדר האינטגרל עם הסכום ולקבל:

$$I=\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx}{n^4+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{n^4+x^2}.$$

נחשב את האינטגרל המסוים: $\int_0^{b}\frac{dx}{n^4+x^2}=\frac{1}{n^2}\arctan\frac{x}{n^2}\Big|_0^b=\frac{1}{n^2}\arctan\frac{b}{n^2}$

ונקבל בסה"כ טור מתכנס: $I=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{n^2}\arctan\frac{b}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(=\frac{\pi^3}{12}\right)$.

ב. תחילה נחשב את רדיוס ההתכנסות עפ"י משפט דלמבר:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\xrightarrow{n\to\infty}4=R$$

נבדוק בקצוות ±4: נציב $x=4$ ונקבל את טור המספרים: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$.

עפ"י מבחן דלמבר לטורים נקבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)2(n+1)}=\frac{4n+4}{4n+2}>1$.

כלומר a_n היא סדרה חיובית עולה ומכאן שבהכרח אינה מקיימת תנאי הכרחי להתכנסות:

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ והטור מתבדר. כן לגבי $x=-4$.

קיבלנו שהטור מתכנס נקודתית בתחום $(-4,4)$.

כיוון שזהו טור חזקות ההתכנסות במידה שווה תהיה בכל קטע <u>סגור</u> המוכל בתחום הזה.

תרגיל: קבע היכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(x-1)^n$ מתכנס במידה שווה והיכן סכום הטור הוא פונקציה רציפה.

פתרון:

נחשב את רדיוס ההתכנסות עפ"י משפט דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

כלומר הטור מתכנס ב- $(0,2)$. נבדוק בקצוות: בנקודה $x=0$ מתקבל טור לייבניץ שמתכנס, ואילו בנקודה $x=2$ הטור הוא טור הרמוני מתבדר. מכאן שהטור מתכנס נקודתית $[0,2)$ ושם הסכום רציף (משפט).

הטור מתכנס במ"ש בכל קטע $[0,b], b<2$.

טענה: לא יתכן שטור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ יתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

הוכחה: הוכחנו שאם טור פונקציות מתכנס במ"ש בתחום כלשהו אז האיבר הכללי שלו מתכנס במ"ש שם לאפס. במקרה של טור חזקות a_kx^k לא יכול להתכנס במ"ש לאפס, שכן לא משנה איזה a_k ניקח, השאפה של $x\to\infty$ תגרום לביטוי כולו לשאוף לאינסוף ולא לאפס.