# אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 10

## *מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.*

**שאלה 1**

בכל אחד מן המקרים הבאים הגדר את הכפל בסקלר ובדוק שמתקבל מודול מעל החוג המתאים.

א. מרחב וקטורי $V$ מעל שדה $F$.

ב. אוסף הוקטורים $R^n$ מעל החוג $R$.

ג. חבורה אבלית $A$ מעל החוג $Z$, עם הפעולה $n\cdot a = a+...+a$.

ד. חוג מנה $R/I$ מעל $R$.

**פתרון**

א. על פי הגדרת מרחב וקטורי $V$ היא חבורה אבילית ושדה $F$ הוא בפרט חוג.
במרחב וקטורי מוגדר כפל בסקלר נגדיר את הכפל בסקלר כפי שהוא מוגדר במרחב וקטורי. כל התכונות שמתקיימות גם במודול, ולכן מתקבל מודול מעל $F$.

ב. נגדיר את החיבור והכפל בסקלר ב $R^n$ לפי רכיבים. מכיוון שחוג הוא עם פעולת החיבור הוא חבורה אבילית נקבל ש $R^n$ חבורה אבילית. פעולת הכפל בחוג היא אסוציאטיבית, וכן מתקיים $r(a+b)=ra+rb,(r+s)a=ra+sa,1\cdot a$ מכיוון שהגדרנו את הכפל בסקלר ב $R^n$ לפי רכיבים נקבל שכל התכונות עבור מודול מתקיימות.

ג. נתון ש $A$ חבורה אבילית, יש להראות שגם התכונות עבור כפל בסקלר מתקיימות.

עבור $n<0, na = -a+\overset{-n}{(-a)}+...(-a)$

i. $n(a+b)=(a+b)+...+(a+b)=a+...+a+b+...+b=na+nb$ כאשר $a,b\in A, n\in\mathbb{Z}$.
השוויון השני מתקיים מכיוון ש $A$ חבורה אבילית. יש לשים לב למקרה ש $n\le 0$.

ii. $(n+m)a = a+\overset{n}{...}+a+a\overset{m}{...}+a = na+ma$.

iii. $n(ma)=n\left(a+\overset{m}{...}+a\right)=\left(na+\overset{m}{...}+na\right)=\left(a+\overset{n}{...}+a\right)\overset{m}{+...+}\left(a\overset{n}{...}+a\right)=(nm)a$.

iv. על פי הגדרת הכפל בסקלר מתקיים $1\cdot a = a$.

ד. חוג $R/I$ הוא חבורה אבילית עם פעולת החיבור. עבור $r\in R, s+I\in R/I$ נגדיר את פעולת הכפל ע"י $r\cdot s+I$. מכיוון ש $r,s\in R \leftarrow r\cdot s\in R$ נקבל ש $r\cdot s+I\in R/I$. התכונות לכפל בסקלר מתקיימות מיידית מהגדרת הכפל בחוג.

i.
$$r\left((s_1+I)+(s_2+I)\right)=r\left((s_1+s_2)+I\right)=r(s_1+s_2)+I=$$
$$rs_1+rs_2+I=rs_1+I+rs_2+I=r(s_1+I)+r(s_2+I).$$

ii. $(r_1+r_2)(s+I)=(r_1+r_2)s+I=r_1s+r_2s+I=r_1s+I+r_2s+I=r_1(s+I)+r_2(s+I)$.

iii. $r_1(r_2(s+I))=r_1(r_2s+I)=r_1(r_2s)+I=(r_1r_2)s+I=(r_1r_2)(s+I)$.

iv. $1\cdot(s+I)=1\cdot s+I=s+I$.

## **שאלה 2**

אם $R$ חוג ו $M$ מודול מעל $R/I$, אז $M$ מודול מעל $R$ לפי הפעולה $r\cdot m=(r+I)\cdot m$.

**פתרון**

מכיוון ש $M$ מודול מעל $R/I$ אז $M$ חבורה חיבורית אבלית. נוכיח שהתכונות עבור הכפל בסקלר מתקיימות.

א. $r\cdot(a+b)=(r+I)\cdot(a+b)=(r+I)\cdot a+(r+I)\cdot b=r\cdot a+r\cdot b$.

ב. $(r+s)\cdot a=(r+s+I)\cdot a=((r+I)+(s+I))\cdot a=(r+I)\cdot a+(s+I)\cdot a=r\cdot a+s\cdot a$.

ג. $r(sa)=r((s+I)a)=(r+I)((s+I)a)=((r+I)(s+I))a=(rs+I)a=(rs)a$.

ד. $1\cdot a=(1+I)\cdot a=a$.

## **שאלה 3**

א. נתבונן ב $R$ כמודול מעל עצמו. הראה שתת המודולים הם בדיוק האידיאלים השמאליים של $R$.

ב. החיתוך של משפחה כלשהי של תת מודולים (של מודול נתון) הוא תת מודול.

**פתרון**

א. נניח ש $I$ אידיאל שמאלי של $R$ ונוכיח ש $I$ תת מודול של $R$. מכיוון ש $I$ אידיאל שמאלי אז $I$ תת חבורה חיבורית, וכן לכל $r\in R,x\in I$ נקבל ש $r\cdot x\in I$. פעולת הכפל בחוג היא אסוציאטיבית, וכן מתקיים $r(a+b)=ra+rb,(r+s)a=ra+sa,1\cdot a$ מכיוון ש $I\subseteq R$ התכונות עבור הכפל בסקלר מתקיימות.

ב. תהיי $\{M_i\}_{i\in I}$ משפחת של תתי מודולים של $M$ מעול חוג $R$. נוכיח ש $\bigcap_{i\in I} M_i$ הוא גם תת מודול של $M$. מכיוון ש $\{M_i\}_{i\in I}$ משפחה של תתי מודולים של $M$ אז היא גם משפחה של תתי חבורות של $M$, ולכן $\bigcap_{i\in I} M_i$ תת חבורה של $M$. נראה סגירות לכפל $r\in R,m\in\bigcap_{i\in I} M$. מכיוון ש $m\in\bigcap_{i\in I} M$ אז לכל $i\in I$ נקבל ש $m\in M_i$ ומכיוון ש $\{M_i\}_{i\in I}$ משפחה של תתי מודולים אז לכל $i\in I$ נקבל ש $r\cdot m\in M_i$ ועל פי הגדרת החיתוך $r\cdot m\in\bigcap_{i\in I} M$.

## **שאלה 4**

יהיו $A,B\le M$ תת מודולים, $\varphi:M\to N$ הומומורפיזים, $K=\ker(\varphi)$.

הוכח: $\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$ אם ורק אם $A\cap(B+K)\subseteq(A\cap B)+K$.

**פתרון**

$\Leftarrow$ נניח ש $\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$ יהי $a\in A\cap(B+K)$ ז"א $a=b+k;b\in B,k\in K$

$\varphi(a)=\varphi(b+k)=\varphi(b)+\varphi(k)=\varphi(b)$ מכיוון ש $\varphi(a)=\varphi(b),a\in A,b\in B$ נקבל ש

$\varphi(a)\in\varphi(A)\cap\varphi(B)$ מהנתון ש $\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$ נקבל ש $\varphi(a)\in\varphi(A\cap B)$ ז"א

קיים $y\in A\cap B$ כך ש $\varphi(y)=\varphi(a)$ כעת $0=\varphi(a-y)=\varphi(a)-\varphi(y)\leftarrow a-y\in K$ ואז

$a=y+a-y\in(A\cap B)+K$.

$\Rightarrow$ נניח ש $A\cap(B+K)\subseteq(A\cap B)+K$. מספיק להראות ש $\varphi(A)\cap\varphi(B)\subseteq\varphi(A\cap B)$ יהי $y\in\varphi(A)\cap\varphi(B)$ ז"א קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש

$y=\varphi(a)=\varphi(b)\rightarrow\varphi(a-b)=\varphi(a)-\varphi(b)=0$ ולכן $a-b\in K$. $a=b+a-b\in B+K$, ולכן

$a \in A \cap (B+K) \subseteq (A \cap B)+K$ לכן $a = t+s; t \in A \cap B, s \in K$ כעת

$y = \varphi(a) = \varphi(t+s) = \varphi(t)+\varphi(s) = \varphi(t)$ מכיוון ש $t \in A \cap B$ נקבל ש $y \in \varphi(A \cap B)$.

**שאלה 5**

יהי $A$ חוג, $M$ מודול מעל $A$ נוצר סופית. נסמן $L = \{x \in A : 1-x \text{ הפיך}\}$.

א. יהי $I$ אידיאל של $A$ המוכל ב $L$. הוכיחו שאם $IM = M$ אז $M = 0$. (רמז: באינדוקציה על מספר היוצרים של $M$.

ב. יהי $U$ אידיאל נילפוטנטי ב A. הוכיחו ש $U$ מוכל ב $L$.

**פתרון**

א. נתון ש $M$ מודול מעל $A$ נוצר סופית, ולכן קיימת קבוצה $\{m_i\}_{i=1}^{s} \subseteq M$ כך שכל איבר ב $M$ הוא צירוף מהצורה $\sum_{i=1}^{s} a_i m_i$. נוכיח שהטענה נכונה באינדוקציה על $s$:

אם $s=1$: נניח ש $IM = M$. מכיוון ש $s=1$ ניתן להניח ש $M$ נוצר ע"י $m_1 \in M$ ומכיוון ש $IM = M$ נקבל ש $m_1 \in IM$ ז"א קיימים $x \in I, n \in M$ כך ש $xn = m_1$ מכיוון ש $M$ נוצר ע"י $m_1 \in M$ קיים $b \in A$ כך ש $n = bm_1$ ז"א $m_1 = x(bm_1) = (xb)m_1$ ולכן $m_1 = (xb)m_1 \leftarrow (1-xb)m_1 = 0$ מכיוון ש $I$ אידיאל של $A$ ו $x \in I$ נקבל ש $xb \in I$ נתון ש $I \subseteq L$ ולכן $1-xb$ הפיך ז"א $(1-xb)m_1 = 0 \leftarrow m_1 = 0$. $M$ נוצר ע"י $m_1 \in M$ ז"א שאם $m \in M$ קיים $a_1 \in A$ כך ש $m = a_1 m_1$ מכיוון ש $m_1 = 0$ אז $m = 0$.

אם $s > 1$: קיימת קבוצה $\{m_i\}_{i=1}^{s} \subseteq M$ כך שכל איבר ב $M$ הוא צירוף מהצורה $\sum_{i=1}^{s} a_i m_i$ מכיוון ש $IM = M$ נקבל ש $m_1 \in IM$ ז"א קיימים $x \in I, n \in M$ כך ש $xn = m_1$ ז"א $m_1 = x\left(\sum_{i=1}^{s} a_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{s} x(a_i m_i) = \sum_{i=1}^{s} (xa_i) m_i$ ולכן $(1-xa_1)m_1 = \sum_{i=2}^{s} a_i m_i$ מכיוון ש $I$ אידיאל של $A$ ו $x \in I$ נקבל ש $xa_1 \in I$ נתון ש $I \subseteq L$ ולכן $1-xa_1$ הפיך. ז"א $m_1 = \sum_{i=2}^{s} (1-xa_1)^{-1} a_i m_i$ ולכן $M$ נוצר, לכל היותר, ע"י $s-1$ איברים ועל פי הנחת האינדוקציה נקבל ש $M = 0$.

ב. מכיוון ש $U$ אידיאל נילפוטנטי ב $A$ אז לכל $x \in U$ אם $x = 0$ אז $1 = 1-x$ ואם $x \neq 0$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x^n = 0$ $1 = 1 - x^n = (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$.

**<u>שאלה 6</u>**

יהי $R$ חוג קומוטטיבי, $M$ מודול מעליו. תת מודול $N$ של $M$ נקרא גדול ב $M$ (סימון $N <_e M$) אם לכל תת מודול $K$ של $M$. (השונה מ $\{0\}$), $N \cap K \neq \{0\}$.

א. הוכיחו שאם $N_1, N_2 <_e M$ אז $N_1 \cap N_2 <_e M$.

ב. נגדיר $Ann(x) = \{r \in R : r \cdot x = 0\}$. הוכיחו שלכל $x, y \in M$ מתקיים $Ann(x) \cap Ann(y) \subseteq Ann(x+y)$.

ג. תהיי $A(M) := \{x \in M : Ann(x) <_e R\}$ הוכיחו ש $A(M)$ הוא תת מודול של $M$.

**<u>פתרון</u>**

א. נתון ש $N_1, N_2 <_e M$ ולכן לכל תת מודול $K$ של $M$ מתקיים $N_1 \cap K \neq \{0\}, N_2 \cap K \neq \{0\}$. יהי $K \neq \{0\}$ תת מודול של $M$.
$(N_1 \cap N_2) \cap K = N_1 \cap (N_2 \cap K)$ מכיוון ש $N_2 <_e M$ נקבל ש $N_2 \cap K \neq \{0\}$ ומכיוון ש $N_1 <_e M$ ו $N_2 \cap K \neq \{0\}$ תת מודול של $M$ נקבל ש
$(N_1 \cap N_2) \cap K = N_1 \cap (N_2 \cap K) \neq \{0\}$.

ב. יהי $r \in Ann(x) \cap Ann(y)$ ז"א $r \cdot x = r \cdot y = 0$ ולכן $r \cdot (x+y) = r \cdot x + r \cdot y = 0 + 0 = 0$ ז"א $r \in Ann(x+y)$.

ג. תחילה נוכיח ש $A(M)$ תת חבורה של $M$. מכיוון ש $Ann(x) = Ann(-x)$ נקבל שאם $x \in A(M)$ אז $-x \in A(M)$. אם $x, y \in A(M)$ אז $Ann(x) <_e R, Ann(y) <_e R$ מסעיף קודם $Ann(x) \cap Ann(y) \subseteq Ann(x+y)$ ומסעיף א $Ann(x) \cap Ann(y) <_e R$ ולכן $Ann(x+y) <_e R$ ז"א $x + y \in A(M)$. נראה סגירות לכפל בסקלר: יהי $r \in R$ ויהי $x \in A(M)$. צ"ל ש $r \cdot x \in A(M)$ ז"א צ"ל ש $Ann(r \cdot x) <_e R$ יהי $K \neq \{0\}$ תת מודול של $R$ (כמודול מעל עצמו) מכיוון ש $Ann(x) <_e R$ נקבל ש $Ann(x) \cap K \neq \{0\}$ יהי $0 \neq y \in Ann(x) \cap K$ ז"א $y \cdot x = 0$ ולכן
$0 = r \cdot (y \cdot x) = (r \cdot y) \cdot x = (y \cdot r) \cdot x = y \cdot (r \cdot x)$ ז"א $y \in Ann(r \cdot x) \cap K$ ולכן $Ann(r \cdot x) \cap K \neq \{0\}$ ואז $Ann(r \cdot x) <_e R$ כדרוש.