פתרון תרגיל בית 5 אלגברה מופשטת 2

1. קבעו האם האידיאלים הבאים הם ראשוניים\מקסימליים:

   (א) $I = \{(n,0) \mid n \in \mathbb{Z}\} \lhd \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   המנה $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/I$ איזומורפית ל$\mathbb{Z}$ (למה?) שהוא תח"ש ולא שדה, ולכן האידיאל הוא ראשוני אך לא מקסימלי.

   (ב) $\langle 2x+1 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$.

   ניתן לראות ש$\langle 2x+1 \rangle \subsetneqq \langle 2x+1, 3 \rangle$
   והשני הוא אידיאל אמיתי כי אם $1 = 3p(x) + (1+2x)q(x)$ אז $1 = 3p(0)$
   כלומר $p(0) = 1/3$ בסתירה לכך שהמקדמים הם מ$\mathbb{Z}$.
   אם כן זהו לא אידיאל מקסימלי.

2. יהי R חוג סופי קומוטטיבי, הוכיחו כי כל אידיאל ראשוני של R הוא מקסימלי.

   פתרון:
   יהי P אידיאל ראשוני, אזי המנה R/P הוא תח"ש.
   מכיוון שR סופי, R/P הוא סופי ולכן שדה, ולכן P הוא מקסימלי.

3. יהי R חוג קומוטטיבי, ותהי $\{P_i\}_{i \in I}$שרשרת אידיאלים ראשוניים של R. הוכיחו כי $\cup_{i \in I} P_i$ הוא אידיאל ראשוני.

   פתרון:
   נסמן $P = \cup_{i \in I} P_i$ (כבר ראינו שזה אידיאל).
   זהו אידאל אמיתי כי אם $1 \in P$ אז $1 \in P_i$ לאיזשהו i בסתירה לראשוניות של P_i.

   נניח $ab \in P$, אז קיים i כך ש $ab \in P_i$ ובגלל שהוא ראשוני $a \in P_i$ או $b \in P_i$.
   אבל $P_i \subseteq P$ ולכן $a \in P$ או $b \in P$.

4. תהי $\{P_i\}_{i \in I}$ שרשרת אידיאלים ראשוניים בחוג כלשהו R, הוכיחו כי $\cap_{i \in I} P_i$ הוא אידיאל ראשוני.

פתרון:
נסמן $P=\cap_{i\in I}P_i$ (כבר ראינו שזה אידיאל).
ברור ש$P\neq R$ כי $P\subseteq P_i\neq R$ לכל i.

נניח $A,B\nsubseteq P$ עבור אידיאלים A,B.
אזי קיים $i\in I$ כך ש $A,B\nsubseteq P_i$, מה שאומר ש $AB\nsubseteq P_i$ כי P_i ראשוני.
וזה מבטיח ש$AB\nsubseteq P$.

5. תנו דוגמא לחיתוך של אידאלים ראשוניים שאיננו ראשוני.
למשל $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=6\mathbb{Z}$.

6. (א) יהי R תח"ש. הוכיחו כי $R\times\{0\}\lhd R\times R$ אידיאל ראשוני.
המנה איזומורפית ל R שהוא תח"ש ולכן האידיאל ראשוני.

(ב) עבור F שדה, הראו שב $F\times F$ אין אידיאליים ראשוניים פרט ל$\{0\}\times F$ ו $F\times\{0\}$.
ראינו בסעיף הקודם ש$\{0\}\times F$ ו $F\times\{0\}$ הם אכן אידיאלים ראשוניים.
נניח ש I הוא אידיאל ראשוני.
אם יש בו איבר מהצורה (a,b) כאשר $a\neq 0$ אזי $(a^{-1},0)(a,b)=(1,0)\in I$

וזה אומר ש $F\times\{0\}\subseteq I$.
ובאופן סימטרי אם יש איבר (a,b) כאשר $b\neq 0$ אזי $\{0\}\times F\subseteq I$.
מכיוון ש$I\neq F\times F$ אז בהכרח אחת הקואורדינטות באיברי I היא כל הזמן אפס.

בהכללה: אם נסתכל על $F\times F\times F$ למשל, הראנו שאידיאל הוא מכפלה של Fים ואפסים.
אם יש יותר מאפס אחד, נניח $I=0\times 0\times F$, אז הוא לא ראשוני כי
כי $(1,0,1)(0,1,1)\in I$ אבל אף אחד מהאיברים האלו לא בI.

(ג) לכל $n\in\mathbb{N}$, בנו חוג שיש בו בדיוק n אידיאלים ראשוניים.
בהכללה, האידיאלים הראשוניים של $F\times\cdots\times F$ (n פעמים) הם בדיוק

$$0\times F\times\cdots\times F$$
$$F\times 0\times F\times\cdots\times F$$
$$\vdots$$
$$F\times\cdots\times F\times 0$$

ולכן יש בדיוק n אידיאלים ראשוניים.

7. נסמן את החיתוך של כל האידיאלים המקסימליים:

$$J_0(R) = \cap_{M \lhd R, \text{maximal}} M$$

(א) האם הוא אידאל? כן, כמו כל חיתוך כלשהו של אידיאלים.

(ב) חשבו את $J_0(R)$ עבור החוגים: $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

האידיאלים המקסימליים של $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ הם (לפי ההתאמה): $3\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ולכן $J_0\left(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\right) = 3\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

האידיאלים המקסימליים של $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ הם (לפי ההתאמה): $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ו$2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ולכן $J_0\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) = 0$.

האידיאלים המקסימליים של $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ הם (לפי ההתאמה): $3\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ ו$2\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ ולכן $J_0\left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right) = 6\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

(ג) הוכיחו כי אם $R \lhd I$ מקיים $J_0(R) + I = R$ (כלומר שהם קו-מקסימליים) אז $I = R$.

אם בשלילה $I \neq R$ אז הוא מוכל באידיאל מקסימלי M. ואז הוא מופיע בחיתוך שמגדיר את J_0 ולכן $J_0 \subseteq M$.

אזי $R = J_0 + I \subseteq J_0 + M \subseteq M$ בסתירה לכך שM מקסימלי.

(ד) הוכיחו כי $J_0\left(R/J_0(R)\right) = 0$.

לפי ההתאמה, האידיאלים המקסימליים של $R/J_0(R)$ הם מהצורה $M/J_0(R)$ עבור אידיאל מקסימלי M שמכיל את $J_0(R)$.

אך כל אידיאל מקסימלי מכיל את $J_0(R)$ ולכן $J_0\left(R/J_0(R)\right) = \cap_{M \text{ maximal}} \left(M/J_0(R)\right) = J_0(R)/J_0(R) = 0$.

8. עבור חוג R, מסמנים ב $Spec(R)$ את אוסף האידיאלים הראשוניים של החוג.
לכל תת קבוצה $S \subseteq R$ מגדירים

$$V(S) = \{P \in Spec \,|\, S \subseteq P\} \subseteq Spec(R)$$

(א) הוכיחו כי אם I, J הם אידיאלים של R אז $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

(ב) הוכיחו כי אם $\{I_i\}$ אוסף של אידיאלים אז $\cap V(I_i) = V\left(\sum I_i\right)$.

(ג) בונוס: הראו שבכך הגדרנו טופולוגיה על $Spec(R)$.

9. מצאו חיובי שלם a המקיים $a \equiv 1 \pmod{1}$1, $a \equiv 2 \pmod{9}$ ו $a \equiv 4 \pmod{5}$.

נשים לב ש $5, 9, 11$ הם קו-מקסימליים ולכן יש פתרון לפי CRT.
נרשום $a = a_5 9 \cdot 11 + a_9 5 \cdot 11 + a_{11} 5 \cdot 9$.

עבור התנאי הראשון נקבל ש $99a_5 \equiv 4 \pmod 5$ כלומר $a_5 \equiv 1 \pmod 5$, נבחר $a_5 = 1$.
עבור התנאי השני נקבל $55a_9 \equiv 2 \pmod 9$ כלומר $a_9 \equiv 2 \pmod 9$, נבחר $a_9 = 2$.
עבור התנאי השלישי נקבל $45a_{11} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 1)1$ כלומר $a_{11} \equiv 1 \pmod 9$ נבחר $a_{11} = 1$.

נסכם ונקבל ש $a = 254$.

10. מצאו פתרון חיובי שלם ל$5x^3 \equiv 93 \ (\mathrm{mod}\ 2)31$ (מצאו מהם התנאים על x ואז העזרו בCRT).

$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ נפתור לכל ראשוני בנפרד :
עבור 3 נקבל את המשוואה: $5x^3 \equiv 93 \pmod 3$ כלומר $x^3 \equiv 0 \pmod 3$ מה שמכריח ש $x \equiv 0 \pmod 3$.
עבור 7 נקבל את המשוואה: $5x^3 \equiv 93 \pmod 7$ כלומר $x^3 \equiv -1 \pmod 7$ מה שמכריח ש $x \equiv 3, 5, 6$.
עבור 11 נקבל את המשוואה: $5x^3 \equiv 93 \ (\mathrm{mod}\ 1)1$ כלומר $x^3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 1)1$ מה שמכריח ש $x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 1)1$.

נסכם את התנאים על x :

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 3 \\ x &\equiv 3, 5, 6 \pmod 7 \\ x &\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 1)1 \end{aligned}$$

פותרים לפי CRT:
נרשום $x = x_3 7 \cdot 11 + x_7 3 \cdot 11 + x_{11} 3 \cdot 7$.
בשביל התנאי הראשון צריך $77x_3 \equiv 0 \pmod 3$ ולכן ניקח $x_3 = 0$.
בשביל התנאי השלישי צריך $21x_{11} \equiv 10x_{11} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 1)1$ ולכן ניקח $x_{11} = 10$.
בשביל התנאי השני צריך $33x_7 \equiv 3, 5, 6 \pmod 7$ כלומר $x_7 \equiv 2, 1, 4 \pmod 7$.
ניקח כניסיון את $x_7 = 1$.
אזי נקבל $x = 243 \to 12$, בודקים ואכן $x = 12$ הוא פתרון.

11. יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום המקיים $f(a) \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ לכל $a \in \mathbb{Z}$.
הוכח כי $f(a) \in 2\mathbb{Z}$ לכל $a \in \mathbb{Z}$ או ש $f(a) \in 3\mathbb{Z}$ לכל $a \in \mathbb{Z}$.

נניח בשלילה כי יש a,b כך ש

$$\begin{aligned} f(a) &= \pm 1 \pmod 3 \\ f(b) &= 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

לפי CRT (עבור 2,3) קיים x כך ש

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod 3 \\ x &\equiv b \pmod 2 \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f(a) \pmod 3 \\ f(x) &\equiv f(b) \pmod 2 \end{aligned}$$

וקבלנו סתירה.

12. השלימו את הטענה מההרצאה: יהי F שדה שלם סידרתית, ויהי K שדה ארכימדי כך ש $F \subseteq K$. הוכיחו כי $F = K$.

13. (*) יהי $(F,<)$ שדה סדור. הוכיחו כי התכונות הבאות של F שקולות:

(א) כל סדרת קושי היא קבועה לבסוף.

(ב) כל סדרה מתכנסת היא קבועה לבסוף.

(ג) כל סדרה המתכנסת לאפס היא אפס לבסוף.

(ד) אין סדרה חיובית המתכנסת לאפס.