פתרון תרגיל בית 11 – אינפי 1

שאלה 1

תהי $f(x)$ פונקציה. נתון כי- $f(x)$ רבמ"ש בקטע $[a,b]$ וכן רבמ"ש בקטע $[b,c]$.
הוכיחו כי $f(x)$ רבמ"ש בקטע $[a,c]$.

פתרון

$f(x)$ רבמ"ש בקטעים $[a,b]$ ו- $[b,c]$ ולכן בפרט רציפה בקטעים אלו. נראה ש- $f(x)$ רציפה ב- $[a,c]$. יהי $x\in[a,c]$. ברור ש אם $x\neq b$, f רציפה ב- x. נראה ש- f רציפה גם בנקודה b.

f רציפה ב- $[a,b]$ ולכן $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$. f רציפה ב- $[b,c]$ ולכן $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.
מכאן, $\lim\limits_{x\to b} f(x)=f(b)$ והוכחנו רציפות ב- b ובסה"כ הוכחנו רציפות ב- $[a,c]$.
כעת עפ"י משפט קנטור נקבל ש- $f(x)$ רבמ"ש בקטע $[a,c]$.

מש"ל

שאלה 2

תהי פונקציה f המקיימת את התנאי הבא: קיים $k>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$ (זה נקרא תנאי ליפשיץ).

הוכיחו/הפריכו: f רציפה במ"ש ב- A.

פתרון

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ אזי אם $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים
$|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|<k\delta=k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$.

מש"ל

שאלה 3

הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה הבאה רציפה במ"ש בקטע $[-4,3]$:
$f(x)=x^3+x$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$. יהיו $x,y\in[-4,3]$.

$$|f(x)-f(y)|=|x^3+x-y^3-y|=|x-y|\cdot|x^2+y^2+xy+1|\le$$
$$\le|x-y|\cdot\left(x^2+y^2+|x|\cdot|y|+1\right)\le|x-y|\cdot(16+16+16+1)\le 49\cdot|x-y|$$

כעת נבחר, $\delta=\frac{\varepsilon}{49}$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים:

א. $\sin e^x$ בקטע $(0,\infty)$

לא. נמצא שתי סדרות מתאימות על מנת להראות שפונקציה זו אינה רציפה במ"ש. $x_n=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ ו $y_n=\ln\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$.

קל לראות ש-

$$\ln(1)=0=\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-\ln\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=|x_n-y_n|.$$

כמו כן, $|f(x_n)-f(y_n)|=|1-(-1)|=2$.

ב. $\ln x$ בקטע $(0,\infty)$

לא. $\ln x$ אינה רבמ"ש בקטע $(0,1)$ (ראינו בתרגול) ולכן אינה רבמ"ש ב-$(0,\infty)$.

ג. $\sin\sqrt{(x+2\pi)}$ בקטע $(0,\infty)$

כן. $x+2\pi$ רציפה במ"ש ובתחום הנ"ל $x+2\pi>0$. $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש עבור $x>0$ ו- $\sin x$ רציפה במ"ש על כל הממשיים. לכן סה"כ זו הרכבה של רציפות במ"ש ולכן רציפה במ"ש (על פי תרגיל 7 בקובץ זה).

<u>דרך נוספת</u>: ניתן לגזור את הפונקציה ולראות שהנגזרת חסומה בתחום הנתון.

ד. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ בקטע מהצורה $(\pi k,\pi k+\pi)$ עבור k שלם

כן: בתוך קטע מהצורה הזו הפונקציה רציפה, וראינו בתרגיל קודם שבקצות הקטע לפונקציה יש גבול. לכן סה"כ היא היא רציפה במ"ש בקטע.

ה. $\ln\left|1-\sin\frac{1}{x}\right|$ בקטע $[0.1,\infty)$

לא: אמנם לפונקציה יש גבולות בקצות הקטע, אבל היא לא מוגדרת בנקודה $x=\frac{2}{\pi}>0.1$ שנמצאת בקטע לכן בוודאי אינה רציפה שם במ"ש.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש בכל קטע $[n,n+1]$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אזי f רציפה במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

<u>הפרכה</u>

למשל: $f(x)=x^2$. ראינו שפונקציה זו לא רציפה במ"ש בכל הישר הממשי, אבל היא כן רציפה במ"ש בכל קטע סגור (לפי קנטור).

ב. אם g,f רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f+g$ רציפה במ"ש בקטע I.

<u>הוכחה</u>

יהי $\varepsilon>0$. f רבמ"ש ולכן קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

g רבמ"ש ולכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta_2$ מתקיים $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

כעת, עבור $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ שני אי השוויונים מתקיימים ולכן:

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)|=|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|\le$$
$$\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|<\varepsilon$$

ג. אם g, f רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f \cdot g$ רציפה במ"ש בקטע I.

<u>הפרכה</u>

ניקח $f(x) = g(x) = x$. כל אחת מהן היא רבמ"ש, אבל $(f \cdot g)(x) = x^2$ לא רבמ"ש.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו f, g רציפות במ"ש וחסומות ב-$\mathbb{R}$. הוכיחו כי $f \cdot g$ רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>

f, g חסומות ולכן קיימים $M, K > 0$ כך ש- $|f(x)| \le M,\ |g(x)| \le K,$ לכל $x \in \mathbb{R}$. על מנת להוכיח ש-$f \cdot g$ רבמ"ש: יהי $\varepsilon > 0$ צריך להראות שקיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אזי $|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < \varepsilon$. לפי הנתון ש-$f$ רבמ"ש: קיים $\delta_1 > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta_1$ אזי $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

לפי הנתון ש-g רבמ"ש: קיים $\delta_2 > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta_2$ אזי $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2K}$. כעת מתקיים:

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)| =$$
$$= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \le$$
$$\le |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| =$$
$$= |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

איזו דלתא נבחר? $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

שימו לב שזאת ההוכחה הישירה, ולפני זה מומלץ מאוד לעשות טיוטה, אחרת לא ממש רואים איזה אפסילון יש לבחור בכל הגדרה.

מש"ל

שאלה 7

א. יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות במ"ש. הוכיחו כי $f\circ g$ (הרכבה) רציפה במ"ש. [שינוי קטן באתר: התחומים הם לא כל הממשיים. השאלה באתר היא:
תהי $f:D_1\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש ו
$g:D_2\to D_1$ רציפה במ"ש.
הוכיחו כי ההרכבה $f\circ g:D_2\to\mathbb{R}$ גם כן רציפה במ"ש.

הוכחה

יהי $\varepsilon>0$. נתון ש- f רבמ"ש, לכן קיים $\delta>0$ כך שאם (*) $|x-y|<\delta$ אזי $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

נתון ש- g רבמ"ש ולכן לכל $\varepsilon_1>0$, ובפרט עבור $\varepsilon_1=\delta$ קיים $\alpha>0$ כך שאם $|x-y|<\alpha$ אזי $|g(x)-g(y)|<\delta$.

ובגלל ש- $g(x)$ מקיים את תנאי (*) אז נקבל: $|f(g(x))-f(g(y))|<\varepsilon$.

ב. האם הפונקציה $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ היא רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$?

פתרון

התשובה היא לא. נניח בשלילה שכן, אזי $f\circ f(x)=f(f(x))=x^2$ היא רבמ"ש לפי סעיף א', וזאת סתירה (ראיתם בהרצאה).

מש"ל