משפט רול

יהי f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b).
אם $f(a)=f(b)$ אזי קיימת $x_0\in(a,b)$
כך ש $f'(x_0)=0$

מסקנה: אם f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b)
ואם $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) $\forall x\in(a,b)$
אזי f חותכת את ציר ה- x לכל היותר
(נקודה אחת.

הסבר של המסקנה

אילו f היא חותכת את ציר ה- x לפחות שתי נקודות,
נניח $x_0<x_1$ כך ש $x_0,x_1\in(a,b)$, אזי היו מתקיים
ש- f מקיימת את תנאי משפט רול, כלומר היא
רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b), וגם $f(x_0)=f(x_1)=0$
כאשר $[x_0,x_1]\subset[a,b]$ ולכן היא חייבת להיות
(נקודה $x_2\in(x_0,x_2)$ כך ש $f'(x_0)=0$ בסתירה לנתון
ש- $f'(x)>0$ (או $f'(x)<0$) לכל $x\in[a,b]$.

תרגיל: הוכיחו כי למשוואה $x-\frac{1}{2}\sin(x)=3$
יש פתרון יחיד ב- $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר פונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin(x)-3$
ונראה שיש ל- f בדיוק שורש אחד.

* נראה באמצעות משפט ע"ב שיש לפחות שורש אחד:

f רציפה כסכום של רציפות כי x, $\sin(x)$, -3
הן כולן פונקציות רציפות ב- $\mathbb{R}$.

$$f(0)=-3<0$$
$$f(5)=5-\frac{1}{2}\sin(5)-3>0$$

ולכן ע"פ משפט ע"ב יש לפחות (נקו' אחת x_0

שכ- $f(x_0)=0$

~~[illegible]~~

* נראה באמצעות משפט רול שיש לכל היותר שורש אחד:

$$\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=1-\frac{1}{2}\sin(x)\geq\frac{1}{2}>0$$

ולכן לפי משפט רול יש ל- f לכל היותר שורש אחד.

שני התנאים יחד נותנים לנו שיש בדיוק שורש אחד.

תרגיל: הוכיחו כי לפולינום $f(x)=\frac{5}{7}x^7+x^3+x+10$ יש שורש אחד בלבד.

פתרון:

* נראה באמצעות ע"ב שיש לפחות שורש אחד:

$$f(0)=10>0$$
$$f(-2)=-91.42<0$$

f היא פונקציה רציפה כי היא פולינום ולכן ק"מ $-2<x_0<0$ כך ש $f(x_0)=0$.

* נראה באמצעות משפט רול שיש לכל היותר שורש אחד:

$$\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\overset{\geq 0}{5x^6}+\overset{\geq 0}{3x^2}+\overset{\geq 0}{1}>0$$

לפי משפט רול, ק"מ לכל היותר (נקו' אחת x_0 כך ש $f(x_0)=0$.

* לפי שני התנאים יחד נסיק שיש בדיוק (נקו' אחת x_0 כך ש $f(x_0)=0$

תרגיל: יהי f גזירה ב-$\mathbb{R}$ ומקיימת $f(1)=0$
$f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,1)$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ המקיימת

$$c=-\frac{f(c)}{f'(c)}$$

פתרון: נסתכל על הפונקציה $g(x)=x\cdot f(x)$
גזירה כמכפלה של גזירות,

$$g(0)=0$$
$$g(1)=0$$

ולכן לפי משפט רול, קיימת $c\in(0,1)$ כך ש $g'(c)=0$

$$g'(x)=f(x)+x\cdot f'(x)$$

ולכן: $g'(c)=f(c)+c\cdot f'(c)$

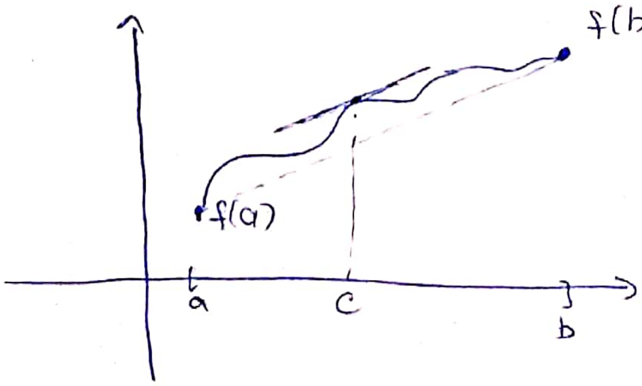
נעביר $f(c)$ אגף ונחלק ב- $f'(c)$.

משפט הערך הממוצע של לגרנז'

~~יהי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) כך שהשיפוע של המשיק של f בנקודה c מקביל לשיפוע של הישר שמחבר את $f(a)$ עם $f(b)$~~

יהי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b), אזי קיימת $a<c<b$ כך ש

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



* כלומר השיפוע של המשיק לגרף של f בנקודה c מקביל עם השיפוע של הישר שמחבר את $f(a)$ עם $f(b)$

תרגיל: תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה
ב- (a,b) כך ש $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו ש- f קבועה בקטע.

פתרון: יהיו $x_1\neq x_2$ בקטע (a,b).
f מקיימת תנאי משפט לגרנז' ולכן ק"מ $c\in(x_1,x_2)$
כך ש

$$f'(c)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

קיבלנו שלכל $x_1\neq x_2$ בקטע (a,b) $f(x_1)=f(x_2)$
ולכן f קבועה ב- (a,b).
נראה ש- f קבועה ב $[a,b]$.
נסמן $f(x)=k\in\mathbb{R}$, ונראה ש- $f(a)=f(b)=k$.
לפי הנתון f רציפה ב- $[a,b]$ ולכן:

$$k=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

$$k=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=k \quad \forall x\in[a,b]$$

$$\Downarrow$$

f קבועה ב- $[a,b]$.

תרגיל: הוכיחו שלכל $0<a<b$

$$(*)\quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}}$$

פתרון: יהי $[a,b]$ כך ש $0<a<b$.
נגדיר $f(x)=\sqrt{x}$. f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה
ב- (a,b) ולכן מקיימת את תנאי משפט לגרנז'.
נוכיח ש

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}<\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}<\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Scanned by CamScanner

לפי משפט לגרנז', ק"מת $a<c<b$ כך ש:

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$$

ונשאר להוכיח:

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

מתקיים: $0<a<c<b$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{a} < \sqrt{c} < \sqrt{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \checkmark$$

מש"ל.

<u>תרגיל:</u> הוכח כי $\tan(x)>x$ ב-$(0,\frac{\pi}{2})$

<u>פתרון:</u> מספיק להראות $\frac{\tan(x)}{x}>1$ (למה מותר לחלק ב-x?) ב-$(0,\frac{\pi}{2})$.

יהי $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, ונתבונן בקטע $[0,x]$.

נגדיר $f(t)=\tan(t)$.

f רציפה ב-$[0,x]$ וגזירה ב-$(0,x)$.

$$\Downarrow$$

לפי לגרנז', ק"מת $0<c<x$ כך ש:

$$\frac{1}{\cos^2(c)} = f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\tan(x)}{x}$$

ונשאר להראות:

$$\forall x\in(0,\tfrac{\pi}{2}): \frac{\tan(x)}{x} > \frac{1}{\cos^2(c)} > 1$$

$|\cos(c)|<1$ ב-$(0,\frac{\pi}{2})$ (למה $<$ ולא $\leq$?) $\quad /\cdot|\cos(c)|$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2(c) < |\cos(c)| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos^2(c)} > 1 \qquad \forall x \in (0,\tfrac{\pi}{2})$$

מש"ל

משפט לופיטל

יהי $-\infty \le x_0 \le \infty$ ונניח: f, g גזירות בסביבה פתוחה מנוקבת של x_0.

אם מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$$

וגם $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'} = L$ כאשר $-\infty \le L \le \infty$

אזי

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = L$$

הערות:

1. אם $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$ לא ד"מ במובן הרחב, לא ניתן להסיק כלום על $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ (**), כלומר (**) יכול להיות ד"מ ויכול להיות לא ד"מ.
2. המשפט נכון גם עבור גבולות חד צד"ם.
3. המשפט נותן לנו כלי לחשב גבולות מהצורה: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}$

דוגמאות:

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan(x)}{\sqrt{1-x^2}-1}\ \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)+\frac{x}{\cos^2(x)}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}\ \left(\frac{0}{0}\right) =$$

לפי לופיטל (גזור בנפרד) את המונה ואת המכנה

שוב לופיטל

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{\cos^2(x)+x\sin(2x)}{\cos^4(x)}\right)}{-1\left(\frac{-\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right)} = -2$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x)}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x)}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^2$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

נקבל מקרה $0\cdot\infty$

(נשנה את הביטוי ונפעיל את כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$

$\Downarrow$

גבול ידוע $\frac{\sin(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

אם ננסה לופיטל כאן אז כלל
לופיטל, כלומר לגזור את המונה
ואת המכנה בנפרד (דכלל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{1}=$ לא ק"ם

$\Downarrow$ לופיטל

לכן משפט לופיטל לא עוזר פה.
נחזור אחורה לכיסוי המדורי ונפצל לסכום
של שני שברים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\underset{\downarrow 1}{1}+\underset{\downarrow 0}{\frac{\sin(x)}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}=1+0=1$$

$\Downarrow$
אריתמטיקה
של גבולות