

תרגיל 1 אנליזה הרמונית תש"ף

להגשה בשבוע שמתחיל ב"ט חשוון 17.11

1. בדקו האם הפונקציות הבאות מקיימות את תכונות הליניאריות, ההרמיטיות והאי-שליליות; האם הן מהוות מכפלה פנימית מעל המרחב V ?

(א) $V = M_n(\mathbb{R})$ (מטריצות מגודל $n \times n$ מעל השדה \mathbb{R}), $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$.

(ב) $V = M_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$.

(ג) $C^1[0, 1]$ (מרחב הפונקציות $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ שהן גזירות ברציפות), עם הפונקציה

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(x) g'(x) dx$$

(ד) $C^1[0, 1]$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) e^x dx$.

2. יהיו x_1, \dots, x_n ממשיים, הוכיחו שמתקיים:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

הדרכה: התבוננו בוקטורים: $v = (1, \dots, 1)$, $u = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ והשתמשו באי-שוויון קושי שוורץ (במכפלה הפנימית הסטנדרטית).

3. הוכיחו את הזהויות הבאות במרחב מכפלה פנימית, כאשר הנורמה היא זו המושרית מהמכפלה הפנימית (המכפלה הפנימית היא הסטנדרטית):

(א) מעל \mathbb{R} : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$

(ב) מעל \mathbb{C} : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + vi\|^2 - i \|u - vi\|^2)$