תירגול 4 - אינטגראל מסוים

2 באפריל 2014

אינטגאל לפי רימן

הגדרה:
תהא f מוגדרת בקטע $[a,b]$
תהא $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה של הקטע .
בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ נבחר נקודה α_i ונבנה סכום רימן עבור החלוקה T הפונקציה f והנקודות $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$

$$\sigma_T(\alpha_1, \ldots a_n) := \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

סימון: פרמטר החלוקה של T - $\lambda(T) = \max(\Delta x_i)$
הגדרה: נאמר שקיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ המקיימת:
לכל חלוקה Tעם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta$ ולכל $\{\alpha_i\}$ מתקיים $|\sigma_T(\alpha_1, \ldots a_n)| < \epsilon$
נהוג לסמן גבול זה $\int_a^b f(x)dx$. הוא נקרא האינטגראל (המסוים) של רימן.
נאמר ש f אינטגרבלית רימן בקטע $[a,b]$.
משפט: פונקציה רציפה או מומונטונית בקטע $[a,b]$ אינטגראבלית שם.
משפט : אם F פונקציה קדומה של פונקציה רציפה f בקטע $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
משפט: תנאי הכרחי לאינטגראביליות רימן היא חסימות הפונקציה.
דוגמא:
$f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 2x \cdot \chi_{(1,2]}(x)$ רציפה למקוטעין ב $[0,2]$
$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx + \int_1^2 2xdx = 1 + x^2|_1^2 = 1 + [2^2 - 1^2] = 4$
דוגמא לפונקציה שאינה אינטגראבלית:
נגדיל $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ פונצקיה דריכלה בקטע $[0,1]$.
$D(x)$ אינה אינטגראבלית כי עבור $\epsilon = 0.5$ לכל חלוקה חלוקה T עם פרמטר חלוקה קטן מ0.5 נוכל לבחור את $\{\alpha_i\}$ להיות מספרים רציונאליים
ואז $\sigma_T(\alpha_1, \ldots a_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1$
תרגיל (ממבחן): הוכח כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$
פתרון: נשתמש בעובדה עי אם $f \leq g$ בקטע $[a,b]$ אז $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ (אם קיימים)
נמצא מיני' ומקס' של $f(x) = e^{x^2-x}$

$f'(x)=f(x)(2x-1)$ ולכן יש נקודה חשודה ב $x=0.5$
$f''(x)=f(x)(2x-1)^2+2f(x)$ ולכן ב־ 0.5 יש מינ' ($f''(0.5)>0$)
$f(0.5)=e^{-0.25}$ ערך מיני'
בנוסף המקס' מתקבל באחת מהקצוות $\max\{f(0),f(2)\}=f(2)=e^2$
ולכן $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}=\int_0^2 e^{-0.25}dx\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le\int_0^2 e^2dx=2e^2$
משפט ־ משפט ערך הממוצע האינטגראלי:
יהיו $f(x)$רציפה ב $[a,b]$ ו $g(x)$ אינטגראבלית אי־שלילית שם.
אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$
במקרה הפרטי ש $g(x)=1$ נקבל $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
הוכחה: אם $\int_a^b g(x)dx=0$ אז השיוון טרי' (כל נקודה c תקיים את השיוון)
אחרת־ נסמן $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),\ M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$ אזי מתקיים
$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$ ואז
$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$. כיוון ש f רציפה, נקבל ממשפט ערך הביניים כי קיימת $c\in[a,b]$
כך ש $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

תרגיל: הוכח כי $\frac{1}{2e}\ln(2)\le\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan(x)dx\le\frac{1}{2}\ln(2)$
פתרון: לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in[0,\pi/4]$
כך ש $e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx=\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan(x)dx$
כיוון ש $e^{-1}\le e^{-\pi/4}\le e^{-c^2}\le e^0=1$
נקבל כי $e^{-1}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx\le\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan(x)dx\le\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$
נראה כי $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx=\frac{1}{2}\ln(2)$
ראינו כי פונקציה קדומה של $\tan(x)$ היא $-\ln|\cos(x)|$ (ע"י הצבה $t=\cos(x)$)
ולכן $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx=-\ln|\cos(\pi/4)|-(-\ln|\cos(0)|)=-\ln(2^{-0.5})=0.5\ln(2)$

קריטריון דארבו לאינטגראבליות

הגדרה: תהא f חסומה ב $[a,b]$ו $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע.
נסמן $m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x),M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x),$
ונגדיר
$\bar{S}(T)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ הסכום העליון של דרבו
$\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$ הסכום התחתון של דרבו
*סכום דרבו עליון/תחתון כבר לא תלוי בבחירת $\{\alpha_i\}$ כמו בסכום רימן.
משפט: מתקיים

1. $\bar{S}(T)=\sup\{\sigma_T\mid\sigma_T-Riemann\,sum\}$
2. $\underline{S}(T)=\inf\{\sigma_T\mid\sigma_T-Riemann\,sum\}$

משפט עבור 2 חלוקות T_1,T_2 של הקטע מתקיים $\underline{S}(T_1)\le\bar{S}(T_2)$
הגדרה: תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$. T' חלוקה של $[a.b]$ תקרא העדנה של T אם היא מכילה את כל הנקודות של T.

משפט: מתקיים

1. $\bar{S}(T) \geq \bar{S}(T')$
2. $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$

הגדרה: $\bar{I} := \inf\limits_{T} \left\{ \bar{S}(T) \right\}$ - האינטגראל העליון של דארבו
$\underline{I} := \sup\limits_{T} \left\{ \underline{S}(T) \right\}$ האינטגראל התחתון של דארבו
משפט: תהא f חסומה בקטע $[a.b]$ אזי
f אינטגראבילית רימן $\Leftrightarrow$ $\bar{I} = \underline{I}$ (ואז הם שווים לערך $\int_a^b f(x)dx$)
$\Leftrightarrow$לכל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)| < \epsilon$
$\Leftrightarrow$לכל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \epsilon$
(כאשר $\omega_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ - התנודה של f בקטע $[x_{i-1}, x_i]$)
תרגיל (ממבחן): תהא f פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$, סדר את הבאים מהקטן לגדול:

1. $f(0)$
2. $f(1)$
3. $\frac{1}{3}\big(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\big)$
4. $\frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1)\big)$
5. $\frac{1}{300} \sum\limits_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$
6. $\frac{1}{300} \sum\limits_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$
7. $\int_0^1 f(x)dx$

פתרון:
נגדיר 3 חלוקות $T : 0 < 1$ ועידון שלה
$T' : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ ועידון שלה
$T" = 0 < \frac{1}{300} < \frac{2}{300} < \cdots < \frac{299}{300} < 1$
אזי מתקיים
$\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T') \leq \underline{S}(T") \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \bar{S}(T") \leq \bar{S}(T') \leq \bar{S}(T)$
כיוון ש fמונוטונית מתקיים:

1. $\underline{S}(T) = f(0)$
2. $\bar{S}(T) = f(1)$
3. $\underline{S}(T') = \frac{1}{3}\big(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\big)$
4. $\bar{S}(T') = \frac{1}{3}\big(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1)\big)$

5. $\underline{S}(T") = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$

6. $\bar{S}(T") = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$

טענה:

$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q},\ \gcd(p,q)=1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ פונקצית רימן (בקטע $[0,1]$) - אינטגראבלית.

יהא $\epsilon > 0$ נראה שקיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \epsilon$

חישוב:

יש מספר סופי של q ים המקיימים $\frac{1}{q} \geq \epsilon$.

עבור כל q כזה יש מספר סופי של שברים מצומצמים $\frac{p}{q} \in [0,1]$

ולכן יש מספר סופי של $x \in [0,1]$ המקיימים $R(x) \geq \epsilon$. נסמן מספר זה ב N

נעיר כי:

לכל חלוקה T , לכל תת קטע מתקיים $\sup\limits_{[x_{i-1}.x_i]} f \leq 1$ $\inf\limits_{[x_{i-1}.x_i]} f = 0,$

מסקנה

יש לכל היותר N תתי קטעים בהם $\sup\limits_{[x_{i-1}.x_i]} f \geq \epsilon$

ולכן לכל היותר Nתתי קטעים בהם $\epsilon \leq \omega_i \leq 1$. נסמן את אוסף הקטעים האלה ב $E_{\geq\epsilon}$

את שאר הקטעים נסמן באוסף $E_{<\epsilon}$.

כעת נבחר חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta = \frac{\epsilon}{N}$ואז

$\bar{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{E_{\geq\epsilon}}\omega_i\Delta x_i + \sum_{E_{<\epsilon}}\omega_i\Delta x_i \leq |E_{\geq\epsilon}|\cdot\frac{\epsilon}{N} + \sum_{E_{<\epsilon}}\epsilon \leq \epsilon+\epsilon = 2\epsilon$.

וסיימנו.

מסקנה מהתרגיל

הרכבה של פונקציות אינטגראביליות אינה בהכרח אינטגראבילית.

הוכחה: נגדיר $g(x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ בקטע $[0,1]$. היא אינטגראבילית.

אבל $(g\circ R)(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \\ 1 & otherwise \end{cases}$אינה אינ' בקטע (בדומה לפונצקית דריכלה)

הערה: הרכבה $g\circ f$ כאשר:

1. g רציפה בקטע $[m,M]$ כאשר אלו החסמים של g
2. f אינט' בקטע $[a,b]$

אז ההרכבה היא אינט' ב- $[a,b]$

הוכחה: יהיה $\epsilon > 0$ נתון.

כיוון ש g רציפה במ"ש על $[m,M]$ אז

$\exists\delta>0 : \forall s,t \in [m,M], |s-t| < \delta \Rightarrow |g(s)-g(t)|\epsilon$

f אינטגראבילית ולכן קיימת חלוקה: $T: a = x_0 < \cdots x_n = b$

של הקטע$[a,b]$ כך ש $\bar{S}(T,f) - \underline{S}(T,f) < \epsilon\cdot\delta$

נגדיר $A = \{i|\omega_i(f) \geq \delta\} \subseteq \{1,2,\dots n\}$

למה 1 $\sum_{i\in A}\Delta x_i \leq \epsilon$

הוכחה למה 1 : $\sum_{i\in A}\delta\Delta x_i \leq \sum_{i\in A}\omega_i(f)\Delta x_i = \bar{S}(T,f) - \underline{S}(T,f) < \epsilon\cdot\delta$

למה 2: עבור $i \notin A$ מתקיים $\omega_i(g\circ f) \le \epsilon$
הוכחה למה 2: לפי הגדרת A נקבל $\omega_i(f) < \delta$ ולכן
$\forall s,t \in [x_{i-1},x_i] : |f(s)-f(t)| \le \omega_i(f) < \delta$ ולכן
$\forall s,t \in [x_{i-1},x_i] : |g(f(s))-g(f(t))| < \epsilon$ מרציפיות במ"ש של g
כעת, (נסמן את המקס' של g והמינ' ב M_g, m_g)

$$\bar{S}(T,g\circ f) - \underline{S}(T,g\circ f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \omega_i(g\circ f) =$$
$$\sum_{i\in A} \Delta x_i \omega_i(g\circ f) + \sum_{i\notin A} \Delta x_i \omega_i(g\circ f)$$
$$\le \sum_{i\in A} \Delta x_i (M_g - m_g) + \sum_{i\notin A} \Delta x_i \epsilon$$
$$\le \epsilon(M_g - m_g) + \epsilon(b-a) = \epsilon \cdot C$$

סימנו.
תרגיל: חשב $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$
פתרון:
$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})$
נשים לב שזה בדיוק $\lim_{n\to\infty}\underline{S}(T)$ כאשר $T = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ חלוקה של הקטע $[0,1]$ עבור הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$
ולכן $\lim_{n\to\infty}\underline{S}(T) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\big|_0^1 = \ln(2)$

משפט (היסודי של החדו"א) תהא $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ פונקציה קדומה שלה (כלומר $F'(x) = f(x)$ ב $[a,b]$)
תרגיל: חשב $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})dt$
פתרון: נתחיל עם גזירת המונה:
נגדיר $F(x) = \int_0^x \sin(\sqrt{t})dt, g(x) = x^2$ אזי המונה הוא $(F\circ g)(x)$
ולכן הנגזרת שלו $F'(g(x))\cdot g'(x) = \sin(\sqrt{x^2})\cdot 2x = 2x\sin(x)$ (בסביבה ימנית של 0)
כעת: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})dt = [\frac{0}{0}, Lopital] = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin(x)}{3x^2} = \frac{2}{3}$

שימושים

נציין שהשיטות של האינטגאל הלא מסוים עובדות (בהתאמה מסוימת) לאינגאל מסוים:

- הצבה־ $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\beta)}^{g(\alpha)} f(x)dx$ (אם $g : [\alpha,\beta] \to [g(\alpha),g(\beta)]$ גזירה ברציפות)
  למשל
  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = [x = \sin(t), dx = \cos(t)dt, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = \pi/2]$
  $= \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt =$
  $\frac{1}{2}[t + \frac{\sin(2t)}{2}\big|_0^{\pi/2}] = \frac{1}{2}[\pi/2 - 0] = \frac{\pi}{4}$
- אינטגראציה בחלקים: $\int_a^b f'g dx = fg|_a^b - \int_a^b fg'dx$
  למשל
  $\int_1^e \ln(x)dx = x\ln(x)\big|_1^e - \int_1^e dx = e-(e-1) = 1$

חישובים ־ שטח, נפח גוף סיבוב ואורך עקומה

תרגיל: מצא את השטח הכלוא בין המשוואות $y=-2x+4$ בין $x=1$ ל $x=3$

פתרון: נקודת חיתוך עם ציר xקיימת ב $x=2$ ולכן

$$\int_1^2 -2x+4dx-\int_2^3 -2x+4dx=-x^2+4x\Big|_1^2-[-x^2+4x\Big|_2^3]=4-[2]-[3-4]=2+1=3$$

נפח גוף סיבוב

תהא $f(x)$ פונצקיה רציפה אי שלילית בקטע $[a,b]$ אזי נפח גוף הסיבוב סביב ציר x הנוצר ע"י הגרף שלה נתון ע"י

$$V=\int_b^b \pi f(x)^2dx$$

הסבר: תהא חלוקה T של הקטע. לכל תת קטע $[x_{i-1}x_i]$־ נכפול אותו בעיגול שרדיוסו $f(x_i)$

ונקבל סכום מקרב לנפח $\sum\limits_{i=1}^{n}\pi f(x_i)^2\Delta x_i$ כאשר פרטמר החלוקה ישאף ל־ 0 נקבל בגבול

$$\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

תרגיל: מצא נוסחא לחישוב נפח של כדור שרדיוסו r

פתרון: נחשוב על כדור שמרכזו בראשית הצירים־ כדור זה הוא נפח גוף סיבוב של המשוואה $x^2+y^2=r^2$ כאשר $y\geq 0$

ולכן $y=\sqrt{r^2-x^2}$

נפח הכדור יהיה

$$\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=\pi(xr^2-\frac{x^3}{3})\Big|_{-r}^{r}=\pi(\frac{2}{3}r^3--\frac{2}{3}r^3)=\pi\frac{4}{3}r^3$$

תרגיל: חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר ע"י סיבוב ציר x של $f(x)=\sqrt{8x}$ וחסום ע"י $x=0,x=2$

פתרון: "נרוץ" על x ים בין 0 ל־2 . עבור כל dx קטן יש בקירוב עיגול ששטחו $\pi(\sqrt{8x})^2$

ולכן השטח הוא $\int_0^2 \pi 8xdx=4\pi x^2\Big|_0^2=16\pi$

תהא $f(x)$ פונצקיה רציפה אי שלילית בקטע $[a,b]$ אזי נפח גוף הסיבוב סביב ציר y הנוצר ע"י הגרף שלה נתון ע"י

$$V=\int_b^b 2\pi x\cdot f(x)dx$$

הסבר: תהא חלוקה T של הקטע. לכל תת קטע $[x_{i-1}x_i]$ נסתכל על גליל חלול בגובה $f(x_i)$, רדיוס חיצוני x_i ורדיוס פנימי x_{i-1}

נקבל קירוב לנפח $\sum\limits_{i=1}^{n}\pi f(x_i)x_i^2-\pi f(x_i)x_{i-1}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\pi f(x_i)(x_i+x_{i-1})\Delta x_i$

כאשר פרטמר החלוקה ישאף ל־ 0 נקבל בגבול $\int_a^b \pi\cdot 2\cdot x\cdot f(x)dx$

תרגיל: חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר ע"י סיבוב ציר y של $f(x)=\sqrt{8x}$ וחסום ע"י $x=0,x=2$

פתרון: $2\pi\int_0^2 x\sqrt{8}\sqrt{x}dx=4\pi\sqrt{2}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2)=4\pi\sqrt{2}\frac{2}{5}2^{2.5}=4^3\pi/5$

אורך עקום

תהא $f(x)$ גזירה ב $[a,b]$. אורך העקום $f([a,b])$ נתון ע"י $L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$

הסבר: תהא חלוקה T של הקטע. לכל תת קטע $[x_{i-1}x_i]$ נסתכל על קירוב של הפונצקיה ע"י ישר.

אורך הישר הוא $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$
ולכן קירוב לאורך העקום הוא
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})})^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + f'(c_i))^2}$$
כאשר $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$
כאשר פרטמר החלוקה ישאף ל־ 0 נקבל בגבול $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$
דוגמא: נחשב את אורך העקום של $f(x) = \ln(x)$ בקטע $[1, 2]$
$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx =$$
$$[t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow x = \sqrt{t^2 - 1}, dx = \frac{2t}{2\sqrt{t-1}} dt, x \in \left[1, 2\right] \Rightarrow t \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]]$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1 + \frac{1}{t^2-1} dt$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}] dt = t + \frac{1}{2}[\ln|t-1| - \ln|t+1|)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}) - [\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})]$$