# בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ"ב, מועד ב' -פתרון

18.9.2022, כ"ב אלול התשפ"ב

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר
מתרגלים: שחר חנניה, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הדר קנר, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

**תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.**.

**ניתן לענות משני צידי הדף.**.

בהצלחה!

1. (21 נק') תהיינה $A, B, C$ קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $A \triangle C \subseteq B \triangle C$ אז $A \subseteq B$.
פתרון: הפרכה: $B = \{2\}$ , $A = C = \{1\}$ ואז $A \triangle C = A \triangle A = \emptyset$ שמוכל ב $B \triangle C$ אבל $A$ לא מוכל ב $B$.

(ב) אם $P(A) \in P(B)$ אז $A \in B$.
פתרון: הוכחה: נניח $P(A) \in P(B)$ אזי $P(A) \subseteq B$ ומכיוון ש $A \in P(A)$ נקבל ש $A \in B$.

(ג) מתקיים $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
פתרון: הפרכה: $B = \{2\}$ , $A = C = \{1\}$ ואז

$$A \backslash (B \cap C) = A \backslash \emptyset = A$$

ומצד שני

$$(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

ומכיוון ש $A \neq \emptyset$ נקבל שהשיוון $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ לא מתקיים.

2. נגדיר פונקציה $f$ מקבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות הלא ריקות של הטבעיים אל הטבעיים על ידי

$$f(\{x_1, , \ldots, x_k\}) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$$

כלומר, לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ לא ריקה, $f(A)$ הוא מכפלת האיברים ב $A$. למשל $f(\{2,3,4\}) = 2 \cdot 3 \cdot 4$ , $f(\{3\}) = 3$.

(א) (6 נק') הוכיחו/הפריכו: $f$ חח"ע.
פתרון: הפרכה:

$$f(\{2,3\}) = 2 \cdot 3 = 6 = f(\{6\})$$

(ב) (6 נק') הוכיחו/הפריכו: $f$ על.
פתרון: הוכחה: יהא $n$ טבעי אזי

$$f(\{n\}) = n$$

ולכן $\{n\}$ מקור ל $n$.

(ג) (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי

$$\sum_{A \in X_n} \frac{1}{f(A)} = n$$

כאשר $X_n = P(\{1, \ldots, n\}) \backslash \{\emptyset\}$ .
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n = 1$: מתקיים כי $X_1 = \{\{1\}\}$ ואז

$$\sum_{A \in X_n} \frac{1}{f(A)} = \frac{1}{f(\{1\})} = \frac{1}{1} = 1$$

- צעד - נניח נכונות עבור $n$ ונוכיח נכונות עבור $n+1$:

$$\sum_{A \in X_{n+1}} \frac{1}{f(A)} = \frac{1}{f(\{n+1\})} + \sum_{\substack{A \in X_{n+1} \\ n+1 \in A \neq \{n+1\}}} \frac{1}{f(A)} + \sum_{\substack{A \in X_{n+1} \\ n+1 \notin A}} \frac{1}{f(A)} = \frac{1}{n+1} + \sum_{A \in X_n} \frac{1}{(n+1) f(A)} + \sum_{A \in X_n} \frac{1}{f(A)}$$

ולפי הנחת האינדוקציה נוכל להמשיך

$$\frac{1}{n+1} + \sum_{A \in X_n} \frac{1}{(n+1) f(A)} + \sum_{A \in X_n} \frac{1}{f(A)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)} \sum_{A \in X_n} \frac{1}{f(A)} + n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)} \cdot n + n = 1 + n$$

3. (24 נק') נגדיר יחס $S$ על $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ על ידי הכלל $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ אם ורק אם

$$x_1\cdot x_2>0 \text{ וגם } y_1\cdot y_2>0$$

(א) הוכיחו כי $S$ יחס שקילות על $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.
פתרון: נוכיח ש $S$ רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי:

- רפלקסיבי: לכל $(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ מתקיים כי $x\neq 0, y\neq 0$ ולכן $x\cdot x>0$ וגם $y\cdot y>0$ ולכן $(x,y)\,S\,(x,y)$.
- סימטריות: נניח $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ מקיימים $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ ונוכיח כי $(x_2,y_2)\,S\,(x_1,y_1)$.
כיוון ש $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ מתקיים

$$x_1\cdot x_2>0 \text{ וגם } y_1\cdot y_2>0$$

ולכן

$$x_2\cdot x_1>0 \text{ וגם } y_2\cdot y_1>0$$

ולכן $(x_2,y_2)\,S\,(x_1,y_1)$.
- טרנזיביות: נניח $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ מקיימים $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ וגם $(x_2,y_2)\,S\,(x_3,y_3)$ ונוכיח כי $(x_1,y_1)\,S\,(x_3,y_3)$. לפי הנתון $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ נסיק כי

$$x_1\cdot x_2>0 \text{ וגם } y_1\cdot y_2>0$$

ומהנתון $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ נסיק כי

$$x_2\cdot x_3>0 \text{ וגם } y_2\cdot y_3>0$$

ולכן

$$x_1\cdot(x_2)^2\cdot x_3>0 \text{ וגם } y_1\cdot(y_2)^2\cdot y_3>0$$

(כפל של מספרים חיוביים הוא חיובי). כיוון ש $(x_2)^2,(y_2)^2$ חיובים אפשר לחלק בהם ואי-השיוון ישמר ונקבל

$$x_1\cdot x_3>0 \text{ וגם } y_1\cdot y_3>0$$

שזה אומר ש $(x_1,y_1)\,S\,(x_3,y_3)$ כפי שרצינו.

(ב) יהא $(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, קבעו אם עוצמת מחלקת השקילות שלו $|[(x,y)]_S|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.
פתרון: העוצמה שווה ל $\aleph$. הוכחה:

$$\begin{aligned}[(x,y)]_S&=\{(x',y')\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\mid(x,y)\,S\,(x',y')\}\\&=\{(x',y')\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\mid x\cdot x'>0,\ y\cdot y'>0\}\end{aligned}$$

ולכן כל $(x',y')\in[(x,y)]_S$ מקיים כי $x',x$ בעלי אותה חיוביות (או ששניהם חיובים או ששניהם שלילים) וכן $y,y'$ בעלי אותה חיובית. וכן להיפך: כל $(x',y')\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ המקיים כי $x',x$ בעלי אותה חיוביות וגם $y,y'$ בעלי אותה חיובית יקיים כי

$$x\cdot x'>0,\ y\cdot y'>0$$

ולכן $(x',y')\in[(x,y)]_S$. מכאן ש $[(x,y)]_S$שווה לכל הרביע (במישור $\mathbb{R}^2$) של $(x,y)$, לא כולל הצירים עצמם. כל אחד מארבעת הרבעים

$$Q_1=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\mid x,y>0\}$$

$$Q_2=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\mid x<0,y>0\}$$

$$Q_3=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\mid x,y<0\}$$

$$Q_4=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\mid x>0,\ y<0\}$$

בעלי אותה עוצמה (למשל הפונקציה $Q_1\to Q_2$ המוגדרת $(x,y)\mapsto(-x,y)$ היא חח"ע ועל). מכיוון ש $|\mathbb{R}|=|(0,\infty)|$ נקבל ש

$$|Q_1|=|(0,\infty)\times(0,\infty)|=\aleph\cdot\aleph=\aleph$$

(ג) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה

$$\left|{}^{(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})}/_{S}\right|$$

היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.

פתרון: כפי שראינו המחלקת השקילות של $[(x,y)]_S$ (עבור איזה שהוא $(x,y)$ נתון) הוא אחד מהרביעים $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$ שהוגדרו בסעיף קודם. מצד שני כל רביע כזה הוא מחלקת שקילות כי

$$Q_1=[(1,1)]_S\,,Q_2=[(-1,1)]_S\,,Q_3=[(-1,-1)]_S\,,Q_4=[(1,-1)]_S$$

ומכיוון ש $(1,1)\,,(-1,1)\,,(1,-1)\,,(-1,-1)$ לא מתייחסים אלו לאלו (הם שונים בחיוביות ברכיב $x$ או $y$) נקבל ש $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$ הם מחלקות שקילות שונות. לסיכום קיבלנו שקבוצת המנה היא

$$\{Q_1,Q_2,Q_3,Q_4\}$$

ויש בה 4 איברים.

4. (24 נק') תהא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה. נסמן ב $I:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ את פונקצית הזהות. הוכיחו את כל הטענות הבאות:

(א) אם $f\circ f=f$ אז $R=f\cup I$ הוא יחס סדר.

פתרון: נניח כי $f\circ f=f$ ונוכיח כי $R$ יחס סדר.

- רפלקסיביות: יהא $n$ טבעי אזי $(n,n)\in I$ ולכן $(n,n)\in R=f\cup I$.
- אנטי-סימטריות: נניח בשלילה שקיימים $a\neq b$ טבעיים כך ש $(a,b)\,,(b,a)\in R$. כיוון שהם שונים ו $R=f\cup I$ נסיק ש $(a,b)\,,(b,a)\in f$ ולכן $f(a)=b, f(b)=a$ ולכן $f\left(f(a)\right)=f(b)=a\neq b=f(a)$ ולכן $f\circ f\neq f$ וקיבלנו סתירה..
- טרנז': נניח $a,b,c$ טבעיים כך ש $(a,b)\,,(b,c)\in R$ וצ"ל $(a,c)\in R$. אם $a=b$ אז $(a,c)=(b,c)\in R$. אם $b=c$ אז $(a,c)=(a,b)\in R$. אחרת $a\neq b, b\neq c$ ואז, כיוון ש $R=f\cup I$ נסיק ש $(a,b)\,,(b,c)\in f$ ולכן $f(a)=b, f(b)=c$ ואז $f\left(f(a)\right)=f(b)=c$ שוה ל $f(a)=b$ ולכן $b=c$ סתירה.

(ב) אם $R=f\cup I$ הוא יחס סדר אז $f\circ f=f$.

פתרון: נניח $R$ יחס סדר. צ"ל $f\circ f=f$. יהא $a$ צ"ל $f\left(f(a)\right)=f(a)$. מתקיים כי $(a,f(a))\in f$ וגם $(f(a),f\left(f(a)\right))\in f$ ולכן $(a,f(a))\,,(f(a),f\left(f(a)\right))\in R=f\cup I$. לפי טרנזיטיביות של $R$ נקבל ש $(a,f\left(f(a)\right))\in R$. מכיוון ש $R=f\cup I$ נסיק ש $(a,f\left(f(a)\right))\in I$ או $(a,f\left(f(a)\right))\in f$. מקרה ראשון $(a,f\left(f(a)\right))\in I$: נקבל ש $a=f\left(f(a)\right)$ ואז $(a,f(a))\,,(f(a),a)=(a,f(a))\,,(f(a),f\left(f(a)\right))\in R$ ולפי אנטי סימטריות של $R$ נקבל ש $a=f(a)$ ולכן $f(a)=f\left(f(a)\right)$. מקרה שני $(a,f\left(f(a)\right))\in f$: נקבל ש $f(a)=f\left(f(a)\right)$.

(ג) אם $f\circ f=I$ אז $R=f\cup I$ הוא יחס שקילות.

פתרון: נניח כי $f\circ f=I$ ונוכיח כי $R$ יחס שקילות.

- רפלקסיביות: יהא $n$ טבעי אזי $(n,n)\in I$ ולכן $(n,n)\in R=f\cup I$.
- סימטריות: יהיו $a,b$ טבעיים כך ש $(a,b)$ צ"ל $(b,a)\in R$. כיוון ש ו $R=f\cup I$ נסיק ש $(a,b)\in f$ או $(b,a)\in I$. במקרה ש $(a,b)\in f$ נקבל ש $f(a)=b$ ואז $f(b)=f\left(f(a)\right)=I(a)=a$ ולכן $(b,a)\in f$ ולכן $(b,a)\in R=f\cup I$.
- טרנז': נניח $a,b,c$ טבעיים כך ש $(a,b)\,,(b,c)\in R$ וצ"ל $(a,c)\in R$. אם $a=b$ אז $(a,c)=(b,c)\in R$. אם $b=c$ אז $(a,c)=(a,b)\in R$. אחרת $a\neq b, b\neq c$ ואז, כיוון ש $R=f\cup I$ נסיק ש $(a,b)\,,(b,c)\in f$ ולכן $f(a)=b, f(b)=c$ ואז $f(b)=f\left(f(a)\right)=I(a)=a$ לכן $(a,c)=(a,a)\in I$ ולכן $(a,c)\in R=f\cup I$.

(ד) אם $R=f\cup I$ הוא יחס שקילות אז $f\circ f=I$ .

פתרון: נניח $R$ יחס שקילות . צ"ל $f\circ f=I$. יהא $a$ צ"ל $f\left(f(a)\right)=a$. מתקיים כי $(a,f(a))\in f$ וגם $(f(a),f\left(f(a)\right))\in f$ ולכן $(a,f(a))\,,(f(a),f\left(f(a)\right))\in R=f\cup I$. לפי טרנזיטיביות של $R$ נקבל ש $(a,f\left(f(a)\right))\in R$. מכיוון ש $R=f\cup I$ נסיק ש $(a,f\left(f(a)\right))\in I$ או $(a,f\left(f(a)\right))\in f$. מקרה ראשון $(a,f\left(f(a)\right))\in I$: נקבל ש $a=f\left(f(a)\right)$ וסיימנו. מקרה שני $(a,f\left(f(a)\right))\in f$: נקבל ש $f(a)=f\left(f(a)\right)$. כעת, כיוון ש $I$ ו $f\circ f=I$ חח"ע נסיק ש $f$ חח"ע (הרכבה חח"ע גורר שהימנית חח"ע). לכן נסיק מהשיוון $f(a)=f\left(f(a)\right)$ כי $f(a)=a$ ואז $a=f(a)=f\left(f(a)\right)$ כפי שרצינו.

5. נגדיר שתת קבוצה $A$ של $\mathbb{R}$ היא "שבורה מפנים" אם לכל שני איברים **שונים** $x,y$ ב $A$ מתקיים כי $x\cdot y\notin\mathbb{Z}$.

(א) (6 נק') תהא $A$ שבורה מפנים מקסימאלית ביחס להכלה. הוכיחו ש $A$ מקיימת כי $|A\cap\mathbb{Z}|=1$.
פתרון: נניח בשלילה כי $|A\cap\mathbb{Z}|\neq 1$ אזי:

- מקרה ראשון: $|A\cap\mathbb{Z}|=0$ ואז $A\cap\mathbb{Z}=\emptyset$. מכאן שכל איבר $a\in A$ מקיים כי $a\notin\mathbb{Z}$ ולכן כל $a\in A$ מקיים $a\cdot 1\notin\mathbb{Z}$ מכאן ש $A\cup\{1\}$ קבוצה שבורה מפנים (מכפלה של כל שני איברים שונים ב $A$ אינה שלמה כי $A$ שבורה מבפנים ומכפלה של $1$ עם כל איבר ב $A$ גם לא שלמה כפי שראינו). בנוסף, $1\notin A$ (כי ב $A$ אין מספרים שלמים) ולכן $A\subsetneq A\cup\{1\}$ בסתירה למקסימאליות של $A$.
- מקרה שני: $|A\cap\mathbb{Z}|\geq 2$ ואז קיימים $n\neq m$ שלמים ב $A$ ו $n\cdot m$ גם שלם בסתירה לכך ש $A$ שבורה מבפנים.

(ב) (6 נק') הוכיחו שקיימת קבוצה שבורה מבפנים מקסימאלית ביחס להכלה.
פתרון: נגדיר ☺ להיות קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שהן שבורות מבפנים. כלומר

$$☺=\{A\subseteq\mathbb{R}\,|\,A\text{ שבורה מבפנים}\}$$

ונתבונן בקס"ח $(☺,\subseteq)$. לפי עקרון המקס' של האוסדורף, קיימת שרשרת מקסימאלית $S\subseteq ☺$. נגדיר

$$B=\cup_{A\in S}A$$

ונראה ש $B$ שבורה מבפנים מקסימאלית.

i. $B$ שבורה מבפנים: יהיו $b_1,b_2\in B$ איברים שונים ב $B$ ונוכיח כי $b_1\cdot b_2\notin\mathbb{Z}$. לפי הגדרת $B$ כאיחוד הקבוצות ב $S$, קיימות $A_1,A_2\in S$ כך ש $b_1\in A_1,b_2\in A_2$. כיוון ש $S$ שרשרת $A_1\subseteq A_2$ או $A_2\subseteq A_1$. בה"כ $A_1\subseteq A_2$ ואז $b_1,b_2\in A_2$. כיוון ש $A_2\in S$ אז $A_2$ שבורה מבפנים. מכיוון ש $b_1,b_2$ איברים שונים ב $A_2$ נקבל ש $b_1\cdot b_2\notin\mathbb{Z}$ .

ii. $B$ שבורה מבפנים מקסימאלית: נניח בשלילה כי $B$ אינה שבורה מקסימאלית (ביחס להכלה). אזי קיימת $\hat{B}$ שבורה מבפנים המקיימת כי $B\subsetneq\hat{B}$. כעת, לכל $A\in S$ מתקיים כי $A\subseteq B$ ולכן $A\subsetneq\hat{B}$. מכאן ש $S\cup\left\{\hat{B}\right\}\subseteq ☺$ והיא שרשרת (שני קבוצות ב $S$ ברות השוואה כי $S$ שרשרת וכל קבוצה ב $S$ מוכל ב $\hat{B}$). בנוסף כיוון שכל $A\in S$ מקיים $A\subsetneq\hat{B}$ אז $A\neq\hat{B}$ ולכן $\hat{B}\notin S$ ולכן $S\cup\left\{\hat{B}\right\}$ שרשרת של קבוצות שבורות מבפנים שמכילה ממש את $S$ בסתירה למקסימאליות של $S$.

(ג) (7 נק') הוכיחו שקיימת $A$ שהיא שבורה מבפנים שמקיימת כי לכל $x\in\mathbb{R}\backslash A$ קיים $y\in A$ כך ש $x\cdot y\in\mathbb{Z}$ ובנוסף מקיימת, לכל $n$ שלם: $A\cap[n,n+1]\neq\emptyset$ כאשר $[n,n+1]$ הוא הקטע הממשי

$$[n,n+1]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,n\leq x\leq n+1\}$$

פתרון: נגדיר $\hat{A}=\left\{n+\frac{1}{2}\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$. טענה: $\hat{A}$ שבורה מבפנים. הוכחה: יהיו $a_1,a_2\in A$ שונים ונראה שמכפלתם אינה ב $\mathbb{Z}$. לפי הגדרת $\hat{A}$, קיימים $n_1,n_2$ שלמים שונים כך ש

$$a_1=n_1+\frac{1}{2},a_2=n_2+\frac{1}{2}$$

(אם $n_1=n_2$ אזי $a_1=a_2$). כעת,

$$a_1\cdot a_2=\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)=n_1n_2+\frac{n_1+n_2}{2}+\frac{1}{4}$$

ומכיוון ש $\frac{n_1+n_2}{2}$ הוא מספר שלם או מספר שלם ועוד $\frac{1}{2}$ נקבל (בצירוף ש $n_1n_2$ שלם) כי $a_1a_2$ הוא מספר שלם ועוד $\frac{1}{2}$ או מספר שלם ועוד $\frac{3}{4}$. בכל מקרה $a_1a_2$ אינו ב $\mathbb{Z}$.

כעת, נגדיר ☺ להיות קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שהן שבורות מבפנים שמכילות את $\hat{A}$. כלומר

$$☺=\left\{A\subseteq\mathbb{R}\,|\,(A\text{ שבורה מבפנים})\wedge\left(\hat{A}\subseteq A\right)\right\}$$

ונתבונן בקס"ח $(☺,\subseteq)$. לפי עקרון המקס' של האוסדורף, קיימת שרשרת מקסימאלית $S\subseteq ☺$. נגדיר

$$B=\cup_{A\in S}A$$

ובאופן דומה לסעיף קודם נקבל ש $B$ שבורה מבפנים מקסימאלית.

i. כיוון ש $B = \cup_{A\in S} A \subseteq \hat{A}$ נקבל שלכל $n$ מתקיים $B \ni n+\frac{1}{2}$ ולכן לכל $n$

$$n+\frac{1}{2}\in B\cap[n,n+1]$$

ולכן התנאי השני המבוקש בשאלה מתקיים.

ii. יהא $x\in\mathbb{R}\backslash B$ ונרצה להראות שקיים $y\in B$ כך ש $x\cdot y\in\mathbb{Z}$ ובזה סיימנו את הפתרון. נניח בשלילה שלכל $y\in B$ מתקיים כי $x\cdot y\notin\mathbb{Z}$ אזי $B\cup\{x\}$ היא קבוצה שבורה מבפנים (כל שני איברים ב $B$ מכפלתם לא שייכת ל $\mathbb{Z}$ כי $B$ שבורה מבפנים ובנוסף כל איבר ב $B$ מכפלה עם $x$ אינו ב $\mathbb{Z}$ לפי הנחת השלילה). כיוון ש $x\notin B$ (לפי הנתון) נקבל ש $B\cup\{x\}$ היא קבוצה שבורה מבפנים שמכילה ממש את $B$ בסתירה לכך ש $B$ שבורה מבפנים מקסימאלית.