חדו"א 1 להנדסה – 83-112 – פתרון בוחן – 05.12.22

1. (36 נק') חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $\sqrt{n^2+2n+2}-n$

יש לנו מקרה בעייתי של $\infty-\infty$.

נכפול ונחלק בצמוד:

$$\sqrt{n^2+2n+2}-n=\frac{n^2+2n+2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}\to\frac{2}{2}=1$$

ב. $n\left(\sqrt{n^2+2n+2}-(n+1)\right)$

לפי הסעיף הקודם, הביטוי בתוך הסוגריים שואף לאפס, ולכן יש לנו מקרה בעייתי של $0\cdot\infty$.

שוב, נכפול ונחלק בצמוד של הביטוי שבתוך הסוגריים:

$$n\left(\sqrt{n^2+2n+2}-(n+1)\right)=n\cdot\frac{n^2+2n+2+(n+1)^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+(n+1)}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{2}$$

ג. $\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)^n$

לפי הסעיף הראשון, הביטוי בבסיס החזקה שואף ל1, ולכן יש לנו מקרה בעייתי של 1^∞.

נעזר בכלל הe:

$$\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)^n\to e^{\lim n\cdot\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n-1\right)}$$

אבל הביטוי במעריך של החזקה הוא בדיוק הגבול מסעיף קודם.

לכן סה"כ הגבול הוא

$$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

2. (36 נק') תהי סדרה המקיימת $a_1 = 6$ וכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מקיימת כי $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$

א. (12 נק') הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n > 1$.

נוכיח באינדוקציה.

עבור $n = 1$ נתון כי $a_1 = 6 > 1$

יהי n עבורו $a_n > 1$ לכן

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1$$

ב. (24 נק') הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

ראשית נוכיח כי מדובר בסדרה מונוטונית יורדת (מדובר בניחוש מושכל לאחר הצבת ערכים ראשונים $6, 4, \sqrt{10}$).

נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1} < a_n$.

עבור $n = 1$ אכן

$$a_2 - a_1 = 4 - 6 < 0$$

יהי n עבורו $a_{n+1} < a_n$, צריך להוכיח כי $a_{n+2} < a_{n+1}$

נפתח את שני צידי אי השיוויון שצריך להוכיח בעזרת נוסחאת הנסיגה, ונקבל כי צריך להוכיח כי

$$\sqrt{3a_{n+1} - 2} < \sqrt{3a_n - 2}$$

נעלה את שני הצדדים בריבוע

$$3a_{n+1} - 2 < 3a_n - 2$$

נצמצם את -2 ונחלק ב3 ונקבל אי שיוויון שקול

$$a_{n+1} < a_n$$

אבל זה מתקיים לפי הנחת האינדוקציה.

כעת, לפי סעיף קודם אנו יודעים כי הסדרה חסומה מלרע, ולכן הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן מתכנסת לגבול סופי.

נסמן את גבול הסדרה ב$a_n \to L \in \mathbb{R}$.

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{3a_n - 2}$$

$$L = \sqrt{3L - 2}$$

ולכן

$$L^2 = 3L - 2$$

הפתרונות למשוואה הריבועית הם

$$L_{1,2} = 1,2$$

כיצד נדע מי מהם הוא הגבול?

נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n > 2$ ולכן $L \geq 2$ ולכן הגבול $L = 1$ נפסל.

נעשה זאת באינדוקציה, בדומה מאד לסעיף א':

עבור $n = 1$ נתון כי $a_1 = 6 > 2$. יהי n עבורו $a_n > 2$ אזי $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$.

סה"כ הוכחנו כי $a_n \to 2$.

3. (36 נק') תהיינה סדרות a_n, b_n כך ש $a_n \to \infty$ וכן $b_n \to 1$.

הוכיחו את הטענות הבאות באמצעות הגדרת הגבול:

א. $a_n + b_n \to \infty$.

יהי $M > 0$ צריך למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $a_n + b_n > M$.

כיוון ש $b_n \to 1$ קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים כי $0 < b_n < 2$.

כיוון ש $a_n \to \infty$ קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים כי $a_n > M$

נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ולכן לכל $n > N$ מתקיים כי

$$a_n + b_n > M + 0 = M$$

ב. $a_n b_n \to \infty$.

יהי $M > 0$ צריך למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $a_n b_n > M$.

כיוון ש $b_n \to 1$ קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים כי $\frac{1}{2} < b_n < \frac{3}{2}$.

לכן לכל $n > N_1$ מתקיים כי $a_n b_n > \frac{1}{2} a_n$ (בהנחה ש $a_n > 0$, דבר שנוכיח בהמשך)

אנו מעוניינים לקבל כי $\frac{1}{2} a_n > M$ ולכן נדרוש $a_n > 2M$ (ובפרט נקבל כי $a_n > 0$)

כיוון ש $a_n \to \infty$, קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים כי $a_n > 2M$.

נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ולכן לכל $n > N$ מתקיים כי

$$a_n b_n > 2M \cdot \frac{1}{2} = M$$