פתרון תרגיל בית 4

שאלה 1

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $A,B \subseteq V$ תת קבוצות ו W תת מרחב, הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $\text{Span}(A \cup W \cup B)=\text{Span}(A) \cup \text{Span}(W) \cup \text{Span}(B)$.

ב. $\text{Span}(A \cup W \cup B)=(\text{Span}(A)+\text{Span}(B)) \cup W$.

ג. $\text{Span}(A \cup W \cup B)=\text{Span}(A)+\text{Span}(B)+W$.

ד. $\text{Span}(A \cup W \cup B)=A+B+W$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

לא נכון

דוגמא נגדית:

$$A=\{(1,1)\}, B=\{(2,2)\}, W=\{(t,0):t \in R\} \ , V=\mathbb{R}^2$$

$$\text{Span}(A \cup W \cup B)=\text{R}^2, (1,2) \notin \text{Span}(A) \cup \text{Span}(W) \cup \text{Span}(B).$$

סעיף ב

לא נכון

דוגמא נגדית:

$$A=\{(1,1)\}, B=\{(2,2)\}, W=\{(t,0):t \in R\} \ , V=\mathbb{R}^2$$

$$\text{Span}(A \cup W \cup B)=\mathbb{R}^2, (1,2) \notin (\text{Span}(A)+\text{Span}(B)) \cup W.$$

סעיף ג

נכון

הוכחה:

$$\text{Span}(A) \subseteq \text{Span}(A \cup W \cup B), \text{Span}(B) \subseteq \text{Span}(A \cup W \cup B), W \subseteq \text{Span}(A \cup W \cup B)$$

מכיוון ש $\text{Span}(A \cup W \cup B)$ תת מרחב של V נקבל ש

$\text{Span}(A \cup W \cup B) \supseteq \text{Span}(A)+\text{Span}(B)+W$.

יהי $v \in \text{Span}(A \cup W \cup B)$ נקבל ש

$v=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3 \ \ \left| u_1 \in Span(A), u_2 \in Span(B), u_3 \in W \right.$ ונקבל את הדרוש.

סעיף ד

לא נכון

הדוגמא הנגדית עבור סעיפים א, ב מתאימה גם לפה.

שאלה 2

נתון : $U=\{(z+\overline{z}, z, -i\text{Re}(z)) \mid z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^3$

א. האם U תת מרחב של $\mathbb{C}^3$ כמ"ו מעל 1. $\mathbb{C}$ 2. $\mathbb{R}$

אם כן, הוכח/י ומצא/י בסיס ומימד עבור U.

אם לא, ספק/י דוגמא נגדית.

ב. תהיי $T=\{(1, 1+i, 2), (1-i, -1, -1-2i), (i, -1, i)\}$

בדוק/י האם $v=(1, -1+i, 0)$ שייך ל-Span(T), האם T תלויה ליניארית,

מה המימד של Span(T), $\text{Span}(T \cup \{v\})$.

i. כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ii. כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

$U=\{(z+\bar{z}, z, -i\mathrm{Re}(z)) \mid z\in\mathbb{C}\}\subseteq\mathbb{C}^3$

עבור $z=a+bi$ נקבל ש $z+\bar{z}=2a$ ו $-i\,\mathrm{Re}(z)=-ai$

ולכן $U=\left\{\left(2a,a+bi,-ai\right)\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

U אינו תת מרחב מעל $\mathbb{C}$ מכיוון ש $(2,1+i,-i)\in U$ אבל $(1+i)\cdot(2,1+i,-i)=(2+2i,2i,-i+1)\notin U$.

נוכיח ש U תת מרחב של $\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{R}$. עבור $a=b=0$ נקבל ש $(0,0,0)\in U$.

יהיו $v_1,v_2\in U$ ז"א $v_1=(2a_1,a_1+b_1i,-a_1i),v_2=(2a_2,a_2+b_2i,-a_2i)$.

$v_1+v_2=\left(2(a_1+a_2),a_1+a_2+(b_1+b_2)i,-(a_1+a_2)i\right)\in U$.

יהי $v\in U$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$. $v=(2a,a+bi,-ai)$, $\alpha v=(2a\alpha,a\alpha+b\alpha i,-a\alpha i)\in U$.

הבסיס של $\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{R}$ הוא $B=\{(2,1,-i),(0,i,0)\}$ ולכן המימד של המרחב וקטורי הוא 2.

סעיף ב

נבדוק תחילה כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1-i & i & 1\\ 1+i & -1 & -1 & -1+i\\ 2 & -1-2i & i & 0\end{array}\right)\overset{\substack{2R_1-R_3\to R_3\\(1+i)R_1-R_2\to R_2}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1-i & i & 1\\ 0 & 3 & i & 2\\ 0 & 3 & i & 2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1-i & i & 1\\ 0 & 3 & i & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

נציב $x_3=i$ ונקבל $x_1=1+i$, $x_2=1$, ולכן $\begin{pmatrix}1\\-1+i\\0\end{pmatrix}=(1+i)\cdot\begin{pmatrix}1\\1+i\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1-i\\-1\\-1-2i\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}i\\-1\\i\end{pmatrix}$

ז"א $(1,-1+i,0)\in spanT$

נבדוק האם הוקטורים תלויים ליניארית $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=(2+i)\cdot\begin{pmatrix}1\\1+i\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1-i\\-1\\-1-2i\end{pmatrix}+3i\cdot\begin{pmatrix}i\\-1\\i\end{pmatrix}$

קיבלנו צירוף לא טראוייאלי שנותן את וקטור האפס ולכן T קבוצה תלויה ליניארית.

מהדירוג של המטריצה ומכיוון ש $v\in SpanT$ נקבל ש $SpanT=Spant(T\cup\{v\})$

והמימד של המרחבים הווקטורים הוא 2.

נבדוק כמרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$.

$T=\{(1,\ 1+i,\ 2),(1-i,\ -1,-1-\ 2i),(i,\ -1,\ i)\}$

$$v_1=(1,1+i,2)=(1,1,2)+i(0,1,0)$$

$$v_2=(1-i,-1,-1-2i)=(1,-1,-1)+i(-1,0,-2)$$

$$v_3=(i,-1,i)=(0,-1,0)+i(1,0,1)$$

נדרג את המטריצה עבור החלק הממשי.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\overset{R_1-R_2\to R_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\overset{R_2+2R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

מהדירוג נקבל ש T קבוצה בת"ל, ולכן T={(1, 1+i, 2),(1-i, -1,-1- 2i),(i, -1, i)} היא בסיס עבור Span(T) והמימד הוא 3.

נבדוק האם $v \in SpanT$.

נבדוק האם קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=v$

v=(1, -1+i, 0)=$(1,-1,0)+i(0,1,0)$.

עבור החלק המדומה נקבל שהצירוף היחיד שנותן $(0,1,0)$ הוא $\alpha_1=1,\alpha_2=0,\alpha_3=0$.

מכיוון שלא נקבל שוויון במקרה הזה עבור החלק הממשי נקבל ש $v\notin SpanT$, ולכן המימד של $Spant(T\cup\{v\})$ הוא 4.

<u>שאלה 3</u>

יהיו $V=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_1+a_2+...+a_n=0\}; U=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_1=a_2=...=a_n\}$ כך ש $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

הוכיחו ש U,V תת-מרחבים של $\mathbb{R}^n$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

נוכיח ש V תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$.

1. מכיוון ש $\overbrace{0+0+...+0}^{n-times}=0$ נקבל ש $(0,0,0,...,0)\in V$ ולכן $V\neq\phi$.
2. יהיו $v_1,v_2\in V$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$.

$v_1\in V \Leftarrow v_1=(b_1,b_2,...,b_n)$ כך ש $b_1+b_2+...+b_n=0$.

$v_2\in V \Leftarrow v_2=(c_1,c_2,...,c_n)$ כך ש $c_1+c_2+...+c_n=0$.

$$v_1+\alpha v_2=(b_1,b_2,...,b_n)+\alpha(c_1,c_2,...,c_n)=(b_1+\alpha c_1,b_2+\alpha c_2,...,b_n+\alpha c_n)$$

$$b_1+\alpha c_1+b_2+\alpha c_2+...+b_n+\alpha c_n=(b_1+b_2+...+b_n)+\alpha(c_1+c_2+...+c_n)=0+\alpha\cdot 0=0,$$

ולכן $v_1+\alpha v_2\in V$.

נוכיח ש U תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$.

1. מכיוון ש $\overbrace{0=0=...=0}^{n-times}$ נקבל ש $(0,0,0,...,0)\in V$ ולכן $V\neq\phi$.
2. יהיו $v_1,v_2\in V$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$.

$v_1\in V \Leftarrow v_1=(b_1,b_2,...,b_n)$ כך ש $b_1=b_2=...=b_n$.

$v_2\in V \Leftarrow v_2=(c_1,c_2,...,c_n)$ כך ש $c_1=c_2=...=c_n$.

$$v_1+\alpha v_2=(b_1,b_2,...,b_n)+\alpha(c_1,c_2,...,c_n)=(b_1+\alpha c_1,b_2+\alpha c_2,...,b_n+\alpha c_n).$$

$b_1=b_2=...=b_n$, $c_1=c_2=...=c_n$ ולכן

$(b_1+\alpha c_1)=(b_2+\alpha c_2)=...=(b_n+\alpha c_n)$, ולכן $v_1+\alpha v_2\in V$.

<u>שאלה 4</u>

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונגדיר $V_A:=\{B\in\mathbb{F}^{n\times n}: BA=AB\}$.

א. הוכח ש V_A תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ב. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות.

<u>פתרון שאלה 4</u>

א.

1. $0\cdot A=A\cdot 0=0$ ולכן $0\in V_A$ ז"א $V_A\neq\phi$.
2. נניח ש $B_1,B_2\in V_A$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$.

$B_1\in V_A \Rightarrow B_1A=AB_1,\ B_2\in V_A \Rightarrow B_2A=AB_2$

$$\left(B_1+\alpha B_2\right)A=B_1A+\left(\alpha B_2\right)A=B_1A+\alpha\left(B_2A\right)=AB_1+\alpha\left(AB_2\right)=AB_1+A\left(\alpha B_2\right)=A\left(B_1+\alpha B_2\right)$$

ולכן $B_1+\alpha B_2\in V_A$.

ב.

נניח ש $B,C\in V_A$ ונוכיח ש $BC\in V_A$.

$B,C\in V_A \Rightarrow BA=AB, CA=AC$.

$\left(BC\right)A=B\left(CA\right)=B\left(AC\right)=\left(BA\right)C=\left(AB\right)C=A\left(BC\right)\Rightarrow BC\in V_A$.

<u>שאלה 5</u>

נסמן: $U=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\middle|\alpha+\beta+\gamma=0\right\}$ ו- $W=span(\{(1,2,3),(0,1,3)\})$

מצאו בסיס ומימד לתת מרחבים U, W, $U+W$, $U\cap W$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

נמצא בסיס ומימד ל U.

יש למצוא את קבוצת הפתרונות של המשוואה $\alpha+\beta+\gamma=0$.

β,γ משתנים חופשים. נבחר $\beta=0,\gamma=1$ ונקבל $(-1,0,1)$ נבחר $\beta=1,\gamma=0$ ונקבל $(-1,1,0)$.

הבסיס של המרחב וקטורי U הוא $B=\left\{\left(-1,0,1\right),\left(-1,1,0\right)\right\}$ והמימד הוא 2.

נמצא בסיס ומימד ל W.

מכיוון שהוקטורים $(0,1,3)$ ו $(1,2,3)$ הם בת"ל נקבל ש $B=\left\{\left(1,2,3\right),\left(0,1,3\right)\right\}$ בסיס ל W.

המימד של W הוא 2.

נמצא בסיס ומימד ל U+W.

מכיוון ש $U+W\subseteq\mathbb{R}^3$ אז $\dim\left(U+W\right)\leq 3$.

נראה ש $U+W=\mathbb{R}^3$. הקבוצה $\left\{\left(0,1,3\right),\left(-1,0,1\right),\left(-1,1,0\right)\right\}\subseteq U+W$ בת"ל.

בנוסף $\dim\left(U+W\right)\leq 3$, ולכן $\dim\left(U+W\right)=3$.

קיבלנו קבוצה בת"ל שמספר איבריה שווה למימד של המרחב הוקטורי ולכן היא בסיס.

נמצא בסיס ומימד ל $U\cap W$.

על פי משפט המימדים נקבל ש

$\dim\left(U+W\right)=\dim U+\dim W-\dim\left(U\cap W\right)\rightarrow \dim\left(U\cap W\right)=1$.

נמצא וקטור ששיך גם ל U וגם ל V.

$$\alpha_1\left(-1,0,1\right)+\alpha_2\left(-1,1,0\right)=\beta_1\left(1,2,3\right)+\beta_2\left(0,1,3\right)$$
$$\beta_1=-\alpha_1-\alpha_2$$
$$2\beta_1+\beta_2=\alpha_2$$
$$3\beta_1+3\beta_2=\alpha_1$$
$$\beta_1=2,\beta_2=-3,\alpha_1=-3,\alpha_2=1$$

ולכן הוקטור $\left(2,1,-3\right)\in U\cap W$ מכיוון ש $\dim\left(U\cap W\right)=1$ נקבל ש $B=\left\{\left(2,1,-3\right)\right\}$ בסיס ל $U\cap W$.

<u>שאלה 6</u>

יהיו U, W תת מרחבים מ- $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\},\quad W = span\left\{\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

מצאו בסיס ומימד לתת מרחבים U, W, $U+W$, $U\cap W$.

<u>פתרון שאלה 6</u>

למצוא בסיס ומימד למרחב וקטורי U שקול למציאת בסיס ומימד למרחב וקטורי

$$span\{(1,1,0,2),(2,1,1,1),(1,-1,0,2),(1,1,-3,-1)\}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\underset{\begin{subarray}{c}2R_1-R_2\to R_2\\ R_1-R_3\to R_3\\ R_1-R_4\to R_4\end{subarray}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 3\end{pmatrix}\underset{\begin{subarray}{c}2R_2-R_3\to R_3\\ 4R_2-R_4\to R_4\end{subarray}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -2 & 6\\ 0 & 0 & -3 & 9\end{pmatrix}\underset{3R_3+2R_4\to R_4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ולכן

$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל U, והמימד של U הוא 3.

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ולכן בסיס עבור W והמימד של W הוא 2.

נמצא את $U\cap W$

$$\alpha_1(1,1,0,2)+\alpha_2(0,1,-1,3)+\alpha_3(0,0,1,-3)=\beta_1(4,2,1,0)+\beta_2(2,1,0,-1)$$

ז"א יש למצוא פתרון למערכת

$$\alpha_1(1,1,0,2)+\alpha_2(0,1,-1,3)+\alpha_3(0,0,1,-3)=\beta_1(4,2,1,0)+\beta_2(2,1,0,-1)$$
$$\alpha_1-4\beta_1-2\beta_2=0$$
$$\alpha_1+\alpha_2-2\beta_1-\beta_2=0$$
$$-\alpha_2+\alpha_3-\beta_1=0$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3+\beta_2=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -2\\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\underset{\begin{subarray}{c}R_1-R_2\to R_2\\ 2R_1-R_4\to R_4\end{subarray}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -8 & -5\end{pmatrix}$$

$$\underset{\begin{subarray}{c}R_2-R_3\to R_3\\ 3R_2-R_4\to R_4\end{subarray}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 2 & 2\end{pmatrix}\underset{3R_3-R_4\to R_4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5\end{pmatrix}$$

נבחר $\beta_2=1$ ואז $\beta_1=-1,\alpha_3=0,\alpha_2=1,\alpha_1=-2$.

קיבלנו שהוקטור בבסיס הוא $(-2,-1,-1,-1)$ ולכן הבסיס של המרחב וקטורי $U\cap W$ הוא $\{(-2,-1,-1,-1)\}$ והמימד הוא 1.

ממשפט המימדים נקבל ש

$\dim(W+U)=4$, ולכן $W+U=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. נבחר את הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

<u>שאלה 7</u>

יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכח:

אם $U \not\subset W \wedge W \not\subset U$ אז $U \cup W$ אינו תת-מרחב.

<u>פתרון שאלה 7</u>

נניח ש $U \not\subset W \wedge W \not\subset U$.

$U \not\subset W$ ולכן $U \setminus W \neq \phi$ יהי $u \in U \setminus W$. $W \not\subset U$ ולכן $W \setminus U \neq \phi$ יהי $w \in W \setminus U$.

מכיוון ש $u \in U \setminus W$ אז $u \in U \cup W$ ומכיוון ש $w \in W \setminus U$ אז $w \in U \cup W$.

מספיק להראות ש $u + w \notin U \cup W$ ונראה סתירה למוגדרות במרחבים וקטורים.

נניח בשלילה ש $u + w \in U \cup W$ ז"א $u + w \in U$ או $u + w \in W$.

נניח ב.ה.ג.כ ש $u + w \in U$. מכיוון ש $u \in U$ ו U מרחב וקטורי קיים ל u איבר נגדי $-u \in U$.

$-u + (u+w) = (-u+u) + w = w \notin U$ וקיבלנו סתירה למוגדרות במרחב וקטורי U.

<u>שאלה 8</u>

עבור אילו ערכים של a הקבוצה $\{(a,a,1-a),(a,a^2,1-a^2),(2a,a+a^2,2-2a)\}$ מהווה בסיס ל $\mathbb{R}^3$.

<u>פתרון שאלה 8</u>

מכיוון ש $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ יש לבדוק לאילו ערכים של a הקבוצה בת"ל.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1-a \\ a & a^2 & 1-a^2 \\ 2a & a+a^2 & 2-2a \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2\to R_2 \\ 2R_2-R_3\to R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} a & a & 1-a \\ 0 & a-a^2 & -a+a^2 \\ 0 & a-a^2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2-R_3\to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} a & a & 1-a \\ 0 & a-a^2 & -a+a^2 \\ 0 & 0 & -a+a^2 \end{pmatrix}$$

רק כאשר $a=1, a=0$ הקבוצה תלויה ליניארית, ולכן הקבוצה בת"ל כאשר $a \neq 0, a \neq 1$.

ז"א כאשר $a \neq 0, a \neq 1$ הקבוצה מהווה בסיס ל R^3.

<u>שאלה 9</u>

נתונה הקבוצה $\{(1,0,1),(1,1,1)\} = \{v_1, v_2\}$.

א. מצאו וקטורים v_3, v_4 שאינם תלויים ליניארית, כך ש- $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, B_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$ הם בסיסים ל $\mathbb{R}^3$.

ב. מצאו את הקואורדינטות של הווקטור $v = (2,1,1)$ לפי שני הבסיסים השונים.

<u>פתרון שאלה 9</u>

סעיף א

יש למצוא שני וקטורים v_3, v_4 בת"ל כך ש $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל וכן $\{v_1, v_2, v_4\}$ בת"ל

$v_3 = (1,0,0), v_4 = (0,0,1)$ בת"ל.

נשים לב שהפתרון היחיד של המשוואה

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,1,1) = (0,0,0)$$

הוא הפתרון הטרוויאלי.

בנוסף הפתרון היחיד של המשוואה

$$\alpha_1(0,0,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,1,1) = (0,0,0)$$

הוא הפתרון הטרויאלי.

ולכן הקבוצות $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$ בסיסים של R^3 וקיבלנו את הדרוש.

סעיף ב

$$(2,1,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(1,0,0)$$

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$$

$$[v]_{B_1}=(0,1,1)$$
$$(2,1,1)=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(0,0,1)$$
$$\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=-1$$
$$[v]_{B_2}=(1,1,-1)$$

<u>שאלה 10</u>

הוכיחו או הפריכו:

א. נתון U,W תת מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $\dim(U)=2$, $\dim(W)=3$, $U\not\subset W$.
אז $\dim(U\cap W)=1$.

ב. אם $U=span\{(1,1,0,0),(2,3,1,1),(2,4,2,2)\}$ אז קיים תת מרחב W כך ש $\dim(W)\geq 2$ ו $U\cap W=\{0\}$.

<u>פתרון שאלה 10</u>

סעיף א

הוכחה

$$U+W\subseteq\mathbb{R}^4\rightarrow\dim(U+W)\leq 4$$

על פי משפט המימדים נקבל ש

$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)\rightarrow 4\geq 5-\dim(U\cap W)\rightarrow\dim(U\cap W)\geq 1$ בנ

וסף $U\cap W\subseteq U\rightarrow\dim(U\cap W)\leq 2$.

קיבלנו סה"כ שתי אפשרויות:

אפשרות 1: $\dim(U\cap W)=2$ ואז נקבל ש $\dim(U\cap W)=\dim U\wedge U\cap W\subseteq U$ ז"א
$U\cap W=U$, ולכן $U\subseteq W$ בסתירה לנתון ש $U\not\subset W$.

ולכן האפשרות השנייה בהכרח נכונה.

סעיף ב

נבדוק מה המימד של המרחב וקטורי U:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&3&1&1\\2&4&2&2\end{pmatrix}\underset{2R_1-R_3\rightarrow R_3}{\overset{2R_1-R_2\rightarrow R_2}{\approx}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&-1\\0&-2&-2&-2\end{pmatrix}$$

$W=span\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ מקיים את תנאי השאלה.