הגדרה

יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ תחום. פונקציה $f : D \to \mathbb{C}$ נקראת "מורומורפית" אם היא אנליטית בכל D פרט למספר קטבים מבודדים.

דוגמאות

1. $1/z$ (על $\mathbb{C}$)
2. $\frac{z^3 - 2z + 4}{z^4 - 1}$ על $\mathbb{C}$

טענה

כעת, נניח ש-$f(z)$ מוגדרת ומורומורפית בתחום $D \subset \mathbb{C}$. נגדיר $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. אז גם g מורומורפית ב-D, כאשר האפסים של f הם קטבים פשוטים של g והקטבים של f הם האפסים של g.

הוכחה

- בפרט אם ל-f יש אפס מסדר n בנקודה $z_0 \in D$ אז יש פירוק $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ כאשר h אנליטית בסביבת z_0 ו-$h(z_0) \neq 0$. לפי זה

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - z_0)^{n-1} h(z) + (z - z_0)^n h'(z)}{(z - z_0)^n h(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

כיוון ש-$h(z_0) \neq 0$ הפונקציה $\frac{h'(z)}{h(z)}$ אנליטית בסביבת z_0, לכן קיים ל-g קוטב פשוט ב-z_0 ו-$\text{Res}(g, z_0) = n$.

- ואם קיים ל-f קוטב מסדר m בנקודה $z_1 \in D$, אז יש פירוק $f(z) = (z - z_1)^{-m} k(z)$ כך ש-$k(z)$ אנליטית בסביבת z_1 ו-$k(z_1) \neq 0$. לפי זה

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m(z - z_1)^{-m-1} k(z) + (z - z_1)^{-m} k'(z)}{(z - z_1)^{-m} k(z)} = \frac{-m}{z - z_1} + \frac{k'(z)}{k(z)}$$

לכן קיים ל-g קוטב פשוט ב-z_1 ו-$\text{Res}(g, z_1) = -m$.

הגדרה

"ריבוי" של אפס של f בנקודה z_0 הוא הסדר של האפס. מספר האפסים של f ב-D כולל ריבוי הוא סכום הסדרים של כל האפסים של f ב-D. כמו כן מספר הקטבים של f ב-D כולל ריבוי הוא סכום הסדרים של כל הקטבים של f ב-D.

משפט(עקרון הארגומנט בגירסה ראשונה)

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום על ידי מסילת ז'ורדן γ. תהי $f(z)$ מוגדרת ומורומורפית ב$\overline{D}$ כך שאין לf לא אפסים ולא קטבים בשפה γ. אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ = מספר האפסים כולל ריבוי פחות מספר הקטבים כולל ריבוי של f בD.

הוכחה

נניח שבD f מתאפסת בנקודות $z_1,\dots z_n$ לסדרים $k_1,\dots k_n$ בהתאמה, ונניח שיש לה קטבים בנקודות $w_1,\dots w_m$(בD) לסדרים $l_1,\dots l_m$. אזי, לפי משפט השארית,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{\cancel{2\pi i}}{\cancel{2\pi i}}\left[\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},z_j\right)+\sum_{s=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},w_j\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}k_j+\sum_{s=1}^{m}(-l_s)=$$

=מספר האפסים כולל ריבוי פחות מספר הקטבים כולל ריבוי של f בD. מ.ש.ל.

הערה

כעת נעיר שלאינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ יש פירוש נוסף.

נעשה החלפת משתנים(הצגה) פורמלית באינטגרל זה:

$$w=f(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f'(z)\Rightarrow dw=f'(z)\,\mathrm{d}z$$

באינטגרל המקורי, z מסתובב על γ. אז $w=f(z)$ מסתובב על התמונה $f(\gamma)$. לכנ נראה פורמלית:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w}=\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0)$$

נצדיק את התהליך הנ"ל. בפרט נתחיל עם האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ ונעשה פרמטריזציה של γ

$$z=z(t)\qquad a\le t\le b$$

אז $\mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t$, ו

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{b}\frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)\,\mathrm{d}t$$

לעומת זאת, באינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w}$ פרמטריזציה של $f(\gamma)$ נתונה ע"י

$$w=f(z(t))\qquad a\le t\le b$$

לפי זה

$$\mathrm{d}w = f'(z(t))\, z'(t)\ \mathrm{d}t$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(z(t))\, z'(t)\ \mathrm{d}t}{f(z(t))} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

משפט(עקרון הארגונמט, גירסה שנייה)

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ. תהי $f(z)$ מוגדרת ומרומורפית ב$\overline{D}$ ללא אפסים וקטבים על γ. אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}t$ = מספר האפסים כולל ריבוי פחות מספר הקטבים כולל ריבוי של f בD = $\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0)$.

מסקנה 1

אם "f" במשפט אנליטית בD(ושונה מאפס בγ) אז $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ = מספר האפסים כולל ריבוי של f בD = $\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0)$.

מסקנה 2

תהי $f(z)$ וצג כמו במשפט, ויהי $a\in\mathbb{C}$ מספר קבוע. נניח ש$f(z)\neq a$ בγ. אז $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-1}\,\mathrm{d}z$ = מספר האפסים כולל ריבוי פחות מספר הקטבים כולל ריבוי של $f(z)-a$ בD = $\mathrm{Ind}_{f(\gamma)-a}(0)$ = $\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(a)$.

דוגמת חישוב

נניח ש$f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב$B(0,1)$, ונניח שכל $C(0,1)$(השפה) $\mathrm{Re}f(z)>0$. נגדיר $g(z)=ze^{f(z)}$.

הוכיחו שאם $|a|<1$ אז קיים בדיוק "z" אחד ב$B(0,1)$ כך ש$g(z)=a$.

איך **<u>לא</u>** לפתור

$$g(z)=a$$

$$ze^{f(z)}=a$$

$$e^{f(z)}={}^{a}\!/_{z}$$

$$f(z) = \log(a/z)$$

אבוד!

פתרון נכון

נפתור את התרגיל בעזרת עקרון הארגומנט. כאן $D = B(0,1)$, $\gamma = C(0,1)$. γ אנליטית(ללא קטבים) ולכן עבור $a \in B(0,1)$ מספר הפעמים של $g(z) = a$ = $\mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(a)$.
צ"ל לכל $|a| < 1$, $\mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(a) = 1$. כעת הנתון אומר $g(z) = ze^{f(z)}$, ולכן על γ

$$|g(z)| = |z|\left|e^{f(z)}\right| = qe^{\mathrm{Re}f(z)} > 1e^0 = 1$$

כיוון ש$g(\gamma)$ כולו מחוץ ל$\overline{B(0,1)}$, $\mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(a)$ שווה אותו מספר לכל $a \in B(0,1)$. לכן

$$\mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(a) = \mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(0) =$$

= מספר האפסים כולל ריבוי של g ב$B(0,1)$, וכיוון ש$g(z) = ze^{f(z)}$, $g(z) = 0$ רק עבור $z = 0$, ואזה אפס מסדר 1.
ז.א.

$$\mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(a) = \mathrm{Ind}_{g(0)}(0) =$$

= מספר אפסים כולל ריבוי של g = 1.
לכן כל ערך a, $|a| < 1$ מתקבל בדיוק פעם אחת ע"י g ב$B(0,1)$.

משפט רושה

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ. יהיו f וg אנליטית ב$\overline{D}$, ונניח שעל γ(השפה) $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$(לכל $z \in \gamma$). אזי

(א) $f(z) \neq 0$ וגם $g(z) \neq 0$ על γ.

(ב) יש לf ולg אותו מספר אפסים כולל ריבוי בD.

הוכחה

(א) (בדרך השלילה) נניח ש$z \in \gamma$ ו$f(z) = 0$. לפי הנתון $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$(כי $z \in \gamma$), ז.א. $|0 - g(z)| < |g(z)|$ - שקול $|g(z)| < |g(z)|$ - סתירה!
אם נניח $g(z) = 0$, אז לפי הנתון $|f(z) - 0| < |0| \Leftarrow |f(z)| < 0$ - שוב סתירה!

() נגדיר $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(Z)}$. לכן h מורומורפית ב$\overline{D}$, ועל השפה γ אין לh אפסים(כי $f(z) \neq 0$ לפי (א)) ואין לh קטבים(כי $g(z) \neq 0$ לפי (א)). לכן אפשר להפעיל את עיקרון הארגומנט לומר שמספר האפסים כולל ריבוי פחות מספר

הקטבים כולל ריבוי של h בD = $\mathrm{Ind}_{h(\gamma)}(0)$. כזכור הנתון הוא שעל γ, $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$. נחלק ב$|g(z)|$(ששונה מאפס בγ) לקבל

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1$$

ז.א. לכל $z\in\gamma$, $|h(z)-1|<1$. ז.א. אם $z\in\gamma$, $w=h(z)$ נמצא בעיגול $|w-1|<1$. בפרט $h(\gamma)$אינו מקיף את 0. מכאן ש$\mathrm{Ind}_{h(\gamma)}(0)=0$ = מספר האפסים כולל ריבוי פחות מספר הכתבים כולל ריבוי של $h=f/g$ בD. אבל האפסים של h הם האפסים של f והקטבים של h הם האפסים של g, וכיוון שמספר האפסים פחות מספר הקטבים כולל ריבוי = 0 נסיק שלf ולg יש אותו מספר אפסים כולל ריבוי בD. מ.ש.ל.

גרסת רושה של פרופסור הורוביץ

$$|f(z)-g(z)|<|g(z)|$$

בγ $\Leftarrow$ לf ולg אותו מספר אפסים כולל ריבוי בD.

גרסת רושה של גרישה

$|G(z)|<|F(z)|$ $\Leftarrow$ ל$F+G$ ולG אותו מספר אפסים כולל ריבוי בD.

שקילות הגירסאות

נוכיח את הגירסה של גרישה ע"פ הגירסה של הורוביץ(שכבר הוכחנו). פשוט נגדיר $f(z)$ – $F(z)$, $g(z)=G(z)$. הנתון(של הורוביץ)הוא $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$(על γ), ז.א. $|F(z)|<|G(z)|$(על γ). המסקנה(של הורוביץ) היא שלf ולg אותו מספר אפסים כולל ריבוי בD. ז.א. ל$f=G+g=F+G$ יש אותו מספר אפסים כולל ריבוי כמו לG.

דוגמאות חישוב

1. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $z^6-5z^3+z^2+2$ בתוך עיגול היחידה $B(0,1)$.

פתרון

נבחר איבר "דומיננטי" $f(z)=-5z^3$ ונגדיר $g(z)=z^6+z^2+2$. נראה שבשפה $|z|=1$ $|g(z)|<|f(z)|$. ובכן, אם $|z|=1$

$$|g(z)|=\left|z^6+z^2+2\right|\le\left|z^6\right|+\left|z^2\right|+|2|=|z|^6+|z|^2+2=$$

$$=1+1+2=4<5=\left|-5z^3\right|=|f(z)|$$

קיימנו את התנאי של רושה, לכן ב$B\left(0,1\right)$ קיימים ל$f+g=z^{6}-5z^{3}+z^{2}+2$ ול$f\left(z\right)=-5z^{3}$ אותו מספר אפסים כולל ריבוי. לf יש אפס רק עבור $z=0$ והוא מסדר 3, לכן ל$f+g$ יש בדיוק 3 אפסים כולל ריבוי ב$B\left(0,1\right)$.

2. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $z^{6}-5z^{3}+z^{2}+2$ בתוך עיגול $B\left(0,2\right)$.

פתרון

נגדיר $f\left(z\right)=z^{6}$, $g\left(z\right)=-5z^{3}+z^{2}+2$. בשפה של $B\left(0,2\right)$ $|z|=2$ ולכן

$$\left|g\left(z\right)\right|=\left|-5z^{3}+z^{2}+2\right|\leq5\left|z\right|^{3}+\left|z\right|^{2}+2=$$

$$=5-8+2^{2}+2=46<64=\left|z^{6}\right|=\left|f\left(z\right)\right|$$

קיימנו את תנאי רושה, לכן לפונקציה $\left(f+g\right)\left(z\right)=z^{6}-5z^{3}+z^{2}+2$ יש אותו מספר אפסים כולל ריבוי ב$B\left(0,2\right)$ כמו $f\left(z\right)=z^{6}$, ולf יש 6 אפסים כולל ריבוי בעיגול זה.

3. $D=\left\{ z\in\mathbb{C}|-1<\text{Re }z<1\right\}$. כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $3z^{6}-e^{z}$ בתוך D?

פתרון

ניקח $m>0$ ונגדיר

$$D_{m}=\left\{ z\in\mathbb{C}\left|\begin{array}{c}-1<\text{Re }z<1\\-m<\text{Im }z<m\end{array}\right.\right\}$$

נספור את האפסים של $3z^{6}-e^{z}$ בתוך D_{m} ונשאיף $m\to\infty$.

אמנם לכל $z\in\mathbb{C}$ $\left|e^{z}\right|=e^{\text{Re }z}$ ולכן אם $z\in\overline{D_{m}}$

$$\left|e^{z}\right|=e^{\text{Re }z}\leq e^{1}=e$$

בשפה של D_{m}, $|z|$ = המרחק לראשית ≤1, לכן

$$3\leq3\left|z\right|^{6}\leq\left|3z^{6}\right|$$

לכן בשפה של D_{m}

$$\left|-e^{z}\right|\leq e<3\leq\left|3z^{6}\right|$$

לכן בD_{m} יש אותו מספר של אפסים כולל ריבוי לפונקציה $3z^{6}-e^{z}$ ולפונקציה $3z^{6}$ שהם 6 אפסים כולל ריבוי. לכל $m>1$ יש אותה תוצאה - 6 אפסים כולל ריבוי בD_{m}. לכן בD כולו יש לפונקציה $3z^{6}-e^{z}$ - 6 אפסים כולל ריבוי.

4. יהי $p\left(z\right)$ פולינום מרוכב ממעלה $n>0$. נוכיח שלp יש בדיוק n אפסים כולל ריבוי ב$\mathbb{C}$.(המשפט היסודי של אלגברה).

הוכחה

ללא הגבלת הכלליות, $p\left(z\right)=z^{n}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{k}z^{k}$. נגדיר

$$f\left(z\right)=z^{n}\qquad g\left(z\right)=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k}z^{k}$$

נראה שלכל $R>0$ "גדול" $\left|g\left(z\right)\right|<\left|f\left(z\right)\right|$ ב$C\left(0,R\right)$:

ובכן: $\frac{g\left(z\right)}{f\left(z\right)}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{k}z^{k-m}$ לכן $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{g\left(z\right)}{f\left(z\right)}=0$. לכן קיים $R_{0}>0$ כך שאם $R>R_{0}$ אז $\left|\frac{g\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right|<1$ לכל $R=\left|z\right|$. במילים אחרות, אם $R>R_{0}$ אז $\left|g\left(z\right)\right|<\left|f\left(z\right)\right|$ על $C\left(0,R\right)$.

קיימנו את תנאי רושה. נוכל להסיק שלכל $R>R_{0}$ יש ל$P\left(z\right)=f\left(z\right)+g\left(z\right)$ אותו מספר אפסים, כולל ריבוי ב$B\left(0,R\right)$.

$f\left(z\right)=z^{n}$ שיש לה n אפסים כולל ריבוי ב$B\left(0,R\right)$, לכן גם ל$p\left(z\right)$ יש n אפסים כולל ריבוי ב$B\left(0,R\right)$. הדבר נכון לכל $R>R_{0}$, לכן נוכל להסיק שב$\mathbb{C}$ כולו יש לp n אפסים כולל ריבוי.

5. נניח ש$f\left(z\right)$ אנליטית ב$\overline{B\left(0,1\right)}$ ועל $C\left(0,1\right)$(השפה) $\mathrm{Re}f\left(z\right)>0$. נגדיר $g\left(z\right)=ze^{f\left(z\right)}$. הוכיחו שאם $\left|g\right|<1$ אז קיים בדיוק "z" אחד ב$B\left(0,1\right)$ כך ש$g\left(z\right)=a$.

פתרון

ננסה להוכיח שלפונקציה $g\left(z\right)-a$ יש בדיוק אפס אחד כולל ריבוי ב$B\left(0,1\right)$. לצורך זה נגדיר

$$h\left(z\right)=-a\left(\mathrm{const}\right)$$

נתון

$$\left|h\left(z\right)\right|=\left|-a\right|<1$$

על השפה $\left|z\right|=1$

$$\left|g\left(z\right)\right|=\left|ze^{f\left(z\right)}\right|=\left|z\right|\left|e^{f\left(z\right)}\right|=1e^{\mathrm{Re}f\left(z\right)}>1e^{0}=1$$

ז.א. בשפה $C\left(0,1\right)$

$$\left|h\left(z\right)\right|<1<\left|g\left(z\right)\right|$$

לכן ל$g\left(z\right)$ ול$h\left(z\right)+g\left(z\right)=-a+g\left(z\right)$ אותו מספר אפסים ב$B\left(0,1\right)$(כולל ריבוי), אבל $g\left(z\right)=ze^{f\left(z\right)}$ שיש לה בדיוק אפס אחד מסדר 1 באפס. לכן ל$\left(g+h\right)\left(z\right)=$ $g\left(z\right)-a$ יש אפס אחד בדיוק ב$B\left(0,1\right)$. מ.ש.ל.