תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום)**.** תארו את כל המחלקות השמאליות ב-$\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle$.

שאלה 2. מצאו את האינדקסים הבאים:

א. $[U_{14} : \langle 11\rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ב. $[\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (2,2)\rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ג. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (2,2)\rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה $H, K \le G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $(|H|, |K|) = 1$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

שאלה 4. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^3.

א. הוכיחו שניתן ליצור את G עם תת־קבוצה בת שלושה איברים $a, b, c \in G$ (כלומר $G = \langle a, b, c\rangle$). רמז: משפט לגראנז' כמה וכמה פעמים.

ב. בחרו p. תנו דוגמה מפורשת לחבורה G אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים $a, b \in G$, אבל לא עם איבר אחד.

ג. רשות: הראו שישנה חבורה לא אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים לפי ההדרכה הבאה: התבוננו בקבוצה (שכבר פגשנו מעל $\mathbb{R}$)

$$H(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| x, y, z \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

ועל האיברים $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. הראו כי $\left|\left\langle a, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle\right| = p^2$, והסיקו מזה ש-$H(\mathbb{Z}_p) = \langle a, b\rangle$.

שאלה 5. הוכיחו שלכל $n, s > 1$ מתקיים כי $n|\varphi(s^n - 1)$.
רמז: המספר $\varphi(s^n - 1)$ הוא סדר של חבורה מוכרת.

שאלה 6. מצאו את כל המספרים n כך ש-$\varphi(n) = 4$ וכל המספרים m כך ש-$\varphi(m) = 8$.
זה בסדר להשתמש במחשב עבור פעולות חשבון פשוטות.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 7. תהי G חבורה. נגדיר את המעריך של החבורה $\exp(G)$ (או האקספוננט) להיות המספר הטבעי הקטן ביותר n כך שלכל $g \in G$ מתקיים $g^n = e$. אם לא קיים כזה, נאמר $\exp(G) = \infty$.

כתבו תוכנה המחשבת את כל הסדרים האפשריים ב-S_n ואת $\exp(S_n)$. זה בסדר להשתמש במערכות תוכנה מתמטיות כמו SageMath.

שאלה 8. תהי I קבוצה מכוונת (כלומר I היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש-$k > i, j$). מערכת של חבורות $\{G_i\}_{i \in I}$ נקראת רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$.

הוכיחו שבמקרה זה $\bigcup_{i \in I} G_i$ היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.

בהצלחה!