אלגברה לינארית 2- פתרון תרגיל 6

שאלה 1:

פתרון לסעיפים א',ב':

נסכם את התוצאות בטבלה הבאה:

	A	B
פולינום אופייני	$(t-1)^4$	$(t-1)^4$
ערכים עצמיים	1	1
מרחב עצמי (של הע"ע 1)	מרחב הפתרונות של: $I-A=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ כלומר: $Sp\{(1,0,0,0)^t, (0,0,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$	מרחב הפתרונות של: $I-B=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ כלומר: $Sp\{(1,0,0,0)^t, (0,0,1,0)^t\}$
ריבוי אלגברי (של הע"ע 1)	4	4
ריבוי גיאומטרי (של הע"ע 1)	3	2
לכסינות	A לא לכסינה	B לא לכסינה

ג. האם A ו- B דומות? (רמז: התבוננו במטריצות $A-I, B-I$).

פתרון

נוכיח כי A ו-B אינן דומות. נניח בשלילה כי יש מטריצה P כך ש- $B=PAP^{-1}$, אז גם:

$$P(A-I)P^{-1} = PAP^{-1} - PIP^{-1} = B-I$$

כלומר, גם A-I ו- B-I דומות. אך $rank(A-I)=1$ בעוד $rank(B-I)=2$, לכן אינן יכולות להיות דומות, ולכן גם A ו-B אינן דומות.

(הרי למטריצות דומות יש אותה דרגה!).

שאלה 2: א. נחפש פולינום אופייני

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & a-2 \\ 1 & 1-\lambda & a-2 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

אם $a \neq 1,2$ אזי יש לנו 3 ע"ע שונים ולכן המטריצה לכסינה.

אם $a=1$ אזי הריבוי האלגברי של ע"ע 1 הוא 2. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=z$$ לכן $V_1 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ הריבוי הגאומטרי גם הוא 2

ולכן המטריצה לכסינה (כי לכל ע"ע הריבוי האלגברי שווה לגאומטרי).

אם $a=2$ אזי הריבוי האלגברי של ע"ע 2 הוא 2. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y$$ לכן $V_2 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ הריבוי הגאומטרי גם הוא 2 ולכן המטריצה לכסינה (כי לכל ע"ע הריבוי האלגברי שווה לגאומטרי).

ב. אם $a \neq 1,2$ אזי עבור ע"ע a נקבל שהו"ע הם $span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. עבור ע"ע 1 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ועבור ע"ע 2 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. לכן המטריצה המלכסנת יכולה להיות $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ והאלכסונית $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

אם $a=1$, עבור ע"ע 2 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ולכן $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ והאלכסונית $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

אם $a=2$ אזי עבור ע"ע 1 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ לכן $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ והאלכסונית $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 3: נניח $u+v$ ו"ע של T ז"א $T(u+v)=k(u+v)$ עבור k סקלר כלשהו.אבל
$T(u)=\lambda u,\ T(v)=\mu v$, T ה"ל לכן נקבל
$\lambda u+\mu v=ku+kv \Leftarrow (\lambda-k)u=(k-\mu)v$.
אם $k=\mu$ אז נקבל לעיל $\lambda u=ku \Leftarrow \lambda=k$ ובסה"כ $\lambda=\mu$.
אם $k\neq\mu$ אז נקבל לעיל $(\lambda-k)u=(k-\mu)v \Leftarrow \frac{(\lambda-k)}{(k-\mu)}u=v$ ז"א ש u,v ת"ל.
אבל אם $\lambda\neq\mu$ זו סתירה כי ו"ע השייכים לע"ע שונים הם בת"ל. ז"א $\lambda=\mu$.

שאלה 4: ניתן לענות על שלשת הסעיפים יחד.
יהי λ ע"ע של ST, ז"א קיים $0\neq v\in V$ כך ש $ST(v)=\lambda v$, נפעיל את T על שני האגפים
נקבל $TS(T(v))=TST(v)=T(\lambda v)=\lambda T(v)$. בסה"כ קיבלנו ש λ הו אגם ע"ע של TS
עם ו"ע $T(v)$.
בסה"כ אנו רואים שכל ע"ע של ST הוא גם ע"ע של TS. ניתן להראות באותו אופן שכל ע"ע
של TS הוא גם ע"ע של ST.

שאלה 5: **נחשב את הפולינום האופייני של A ונקבל: $f_A(t)=-t^3+t+1$.**
לפי משפט קיילי-המילטון מתקיים: $f_A(A)=0 \Rightarrow A^3-A-I=0 \quad (*)$.
מכאן מראים כי A הפיכה ומתקיים: $A\left(A^2-I\right)=I \Rightarrow A^{-1}=A^2-I$.
ולכן, יוצא: $A^{-2}=\left(A^{-1}\right)^2=\left(A^2-I\right)^2=A^4-2A^2+I$.
אם נכפול את (*) ב-A נקבל: $(**) \quad A^4-A^2-A=0 \Rightarrow A^4=A^2+A$. נציב זאת בביטוי ל-
A^{-2} ונקבל:

$$A^{-2}=A^4-2A^2+I=A^2+A-2A^2+I=A-A^2+I=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

כעת, מ(*) נובע: $A^3=A+I \Rightarrow A^{12}=\left(A+I\right)^4=A^4+4A^3+6A^2+4A+I$.
אם נציב את (**) לתוך השוויון האחרון, נקבל: $A^{12}=4A^3+7A^2+5A+I$.
ושוב, אם נציב את (*) לתוך התוצאה האחרונה, נקבל:

$$A^{12}=7A^2+9A+5I=\begin{pmatrix}12&9&7\\16&12&9\\9&7&5\end{pmatrix}.$$

בס"ד

שאלה 6:

נתונה מטריצה $A \in M_n(F)$, $rankA = 1, n \geq 2$. בנוסף נתון $traceA = 0$ (זוהי העקבה, כלומר סכום איברי האלכסון של A) .

$A \in M_n(F)$, $rankA = 1, n \geq 2$ ולכן המטריצה אינה הפיכה ויש לה ע"ע 0. $rankA = 1$ ולכן $\dim(Av = 0) = n - 1$ (מימד הפתרונות של המע' ההומוגנית). כלומר אם נסמן ב X את הר"ג של ע"ע 0 נקבל ש $n-1 \leq x \leq n$

כיוון שלפי משפט מתקיים שלכל ע"ע ר"א $\leq$ ר"ג הרי שגם עבור הר"א שלו (אותו נסמן ב Y) נקבל : $n-1 \leq y \leq n$.

כעת שימו לב: ידוע ש $traceA = 0$. היות וע"ע 0 מופיע לפחות $n-1$ פעמים (לפי מה שאמרנו על הר"א) הרי שאם יופיע ע"ע אחר פעם אחת נקבל $traceA \neq 0$ בסתירה לנתון ולכן סה"כ נקבל ש 0 מופיע n פעמים בפ"א ולכן הפ"א הוא : $f_A(x) = x^n$.