89113- אלגברה ליניארית 2

תרגיל בית 1- דטרמיננטות

להגשה למתרגל/ת שבקבוצה שלו אתם **רשומים.**

בכל השאלות יש לפרט דרך מלאה. תשובות סופיות בלבד לא יזכו בנקודות.

שאלה 1 (15 נק')

נתונות המטריצות

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&0\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\\1&1&1\end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטות של A ו C.

תשובה

$$\det A=-5\qquad \det C=0$$

שאלה 2 (15 נק')

בכל סעיף נתונות שתי מטריצות A,B. עליכם לבטא את $\det A$ כפונקציה של $\det B$ וזאת מבלי לחשב אף אחת מהדטרמיננטות.

א. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$

ב. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

ג. $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&2&-6\\1&0&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&1&-3\\1&0&4\end{pmatrix}$

תשובה

A היא תוצאה של הפעלת פעולה אלמנטרית על שורות B.

א. הפעולה היא $R_2\to R_2+2R_1$ ולכן $\det A=\det B$

ב. הפעולה היא $R_3\leftrightarrow R_2$ ולכן $\det A=-\det B$.

ג. הפעולה היא $R_2 \to 2R_2$ ולכן $\det A = 2\det B$.

שאלה 3 (15 נק')

מצאו את ערך הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} x-2 & x-3 & x-4 \\ x+1 & x-1 & x-3 \\ x-4 & x-7 & x-10 \end{vmatrix}$. ניקוד חלקי בלבד יינתן לחישוב ארוך מהדרוש.

תשובה

נחסר את העמודה הימנית מהשתיים האחרות ונקבל $\begin{vmatrix} x-2 & x-3 & x-4 \\ x+1 & x-1 & x-3 \\ x-4 & x-7 & x-10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-4 \\ 4 & 2 & x-3 \\ 6 & 3 & x-10 \end{vmatrix}$. קיבלנו שתי עמודות שהאחת כפולה של השנייה ולכן הדטרמיננטה מתאפסת.

שאלה 4 (15 נק')

שאלה 4

מטריצת 'ונדרמונדה' היא מטריצה מהצורה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & \dots & x^2{}_n \\ & \vdots & & \\ x^{n-1}{}_1 & x^{n-1}{}_1 & x^{n-1}{}_1 & x^{n-1}{}_1 \end{pmatrix}$. חשבו את הדטרמיננטה של מטריצה כזו. רמז: כדאי להתחיל במקרה $n=3$. מצאו תנאי פשוט לכך ש $\det A \neq 0$.

תשובה

עבור $n=3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & x^2{}_3 \end{pmatrix}$. ע"י דירוג מתקבלת המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x_1+x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & (-x_1+x_3)(-x_2+x_3) \end{pmatrix}$ שהדטרמיננטה שלה היא $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$.

שאלה 5 (15 נק')

נתונה מטריצה A מסדר כלשהו, ואיבריה הם המספרים $0,1$ בלבד (כמובן שכל מספר יכול להופיע יותר מפעם אחת). האם נכון ש $\det A\in\{0,1,-1\}$?

תשובה

לא. $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$

שאלה 6 (10 נק')

הגדרה: מטריצה 'מעניינת' היא מטריצה 3×3 כך שאיבריה הם המספרים $1,2,3,\dots,9$ וכל מספר מופיע פעם אחת בלבד במטריצה.

מצאו מטריצה מעניינת שהיא בעלת דטרמיננטה מקסימלית. נמקו את תשובתכם וחשבו דטרמיננטה זו.

רמז 1: יש יותר מאפשרות אחת. (למה?)

רמז 2: הביטוי

$$9\cdot6\cdot1+8\cdot5\cdot2+7\cdot4\cdot3$$

הוא המינימלי מכל הביטויים מהצורה

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_4\sigma_5\sigma_6+\sigma_7\sigma_8\sigma_9$$

כאשר σ היא תמורה כלשהי על המספרים $1,2,3,\dots,9$.

תשובה

טענה: הביטוי מהצורה

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_4\sigma_5\sigma_6+\sigma_7\sigma_8\sigma_9$$

המקסימלי הוא

$$9\cdot8\cdot7+6\cdot5\cdot4+3\cdot2\cdot1$$

אינטואיטיבית זה ברור – ריכוז מספרים גדולים ביחד ומספרים קטנים ביחד יניב תוצאה גדולה יותר. אפשר להוכיח את זה ע"י חישוב כל האפשרויות במחשב, יש בסה"כ 1680 צירופים שונים (מתוך !9 תמורות).

לכן דטרמיננטה מקסימלית תתקבל כאשר ביטוי זה מופיע עם סימן $+$ והביטוי המינימלי מופיע עם סימן $-$.

בשביל רוב הנקודות הספיק להסביר שצריך למצוא את הביטוי המקסימלי ומה צריך לעשות אחרי שמצאתם.

למשל:

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 9\cdot8\cdot7+6\cdot5\cdot4+3\cdot2\cdot1-9\cdot6\cdot1-8\cdot5\cdot2-7\cdot4\cdot3=412$$

שאלה 7 (15 נק')

שאלה 7

נתונים חמישה מספרים בני חמש ספרות, כולם מתחלקים ב17:

12342 21029 36601 47277 52292

וכן נתונה המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

הוכיחו כי $\det A$ מתחלק ב17

תשובה

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_5\to C_5+10C_4+10^2C_3 \\ +10^3C_2+10^4C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 12342 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 21029 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 36601 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 47277 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 52292 \end{vmatrix}$$

מכיוון שכל איברי העמודה האחרונה מתחלקים ב17, אפשר להוציא 17 מהעמודה האחרונה (כלומר להפעיל פעולת עמודה של חלוקה ב17) לקבל $\det A = 17\det B$ כאפשר איברי B הם מספרים שלמים.