תרגול 10 – שיטות אינטרפולציה

נמשיך בנושא שהתחלנו בתרגול הקודם – אינטרפולציה.

תזכורת:

המטרה שלנו באינטרפולציה היא להעביר פולינום דרך מספר נקודות נתונות.
[כמו שבטורי טיילור ניסינו לדמות פונקציה על ידי פולינום / טור כאן אנחנו מנסים למצוא פולינום שמדמה פונקציה העוברת דרך מספר נקודות נתונות. לעתים נבצע תהליך זה בעזרת פונקציות בסיס.]

שיטת ניוטון (חלוקת ההפרשים)

הגדרת השיטה:

נתונות לנו $n+1$ נקודות $((x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n))$.
[בשיטת ניוטון נבנה את הפולינום שלנו בתהליך הדרגתי, צעד אחר צעד. (בצורה רקורסיבית).]

בכל שלב בשיטה זו 'נתקן' את הפולינום שלנו (שבסופו של דבר יעבור דרך כל הנקודות) כך שיעבור בנקודה נוספת (כך שבשלב הk 'נתקן' את הפולינום בצורה כזו שהוא יעבור בנקודה (x_k,y_k)), ובשלב הn נסיים את התהליך ו'נתקן' את הפולינום שיעבור בנקודה (x_n,y_n). ← סה"כ $n+1$ שלבים, כמספר הנקודות הנתונות.

כדי להתחיל בתהליך נוודא שהפולינום שלנו עובר ב(x_0,y_0), וכדי להמשיך בשלבים הבאים נבצע את התהליך הבא (נקרא לו 'תהליך תיקון הפולינום').

בשלב הk: [נתקן את הפולינום שיעבור בנקודה (x_k,y_k)]

$$p_k(x)=p_{k-1}(x)+\underbrace{C_k}_{\substack{\text{קבוע מסוים} \\ \text{נמצא בהמשך'}}}\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})$$

C_k הוא איזשהו קבוע מסוים, (נשתמש בו כדי לוודא שהפולינום יעבור בנקודה הרצויה) כדי למצוא אותו נדרוש $p_k(x_k)=y_k$ (כך הפולינום בטוח יעבור בנקודה שנרצה.

[שאלה שדורשת מענה היא: איך נהיה בטוחים שהפולינום יעבור בכל הנקודות הקודמות לנקודה (x_k,y_k) ושלא קלקלנו אותו בתהליך התיקון? התשובה פשוטה. הפולינום שלנו מורכב משני חלקים – הפולינום הקודם והביטוי הבא: $C_k\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})$ (נקרא לו 'הביטוי השני'). שימו לב שעבור כל x_i כך ש $0\le i\le k-1$ ה'ביטוי השני' יתאפס. ועבור כל x_i כזה ה'ביטוי השני' יתאפס בכל הפולינומים $p_{i+1},\ p_{i+2},\ldots$. אבל בפולינום p_i הביטוי לא יתאפס. שימו לב שדרשנו ש$p_i(x_i)=y_i$ ולכן מכיוון שהפולינומים

הבאים מוגדרים ברקורסיה על הפולינום הזה, בהכרח בפולינום p_n יתקיים ש$p_n(x_i) = y_i$. לכן בכל שלב **נתקן את הפולינום מבלי לפגוע בשלבים הקודמים**.]

תרגיל:

יהי p_3 פולינום האינטרפולציה העובר בנקודות הבאות:

$$(0,0),(0.5,4.25),(1,3),(2,2)$$

מצא את הפולינום p_3 בעזרת שיטת חלוקת ההפרשים של ניוטון.

פתרון:

שלב 0 (k=0): הנקודה $(0,0)$

$$p_0(x_0) = y_0$$

נציב את הנקודה הנתונה:

$$p_0(0) = 0$$

נתקן את הפולינום לשלב הבא.

שלב 1 (k=1): הנקודה $(0.5, 4.25)$

נשתמש בנוסחה ממקודם:

$$p_1(x) = p_0(x) + C_1\left(x - \underbrace{0}_{x_0}\right) = C_1 \cdot x$$

נציב את הנקודה הנתונה:

$$p_1\left(\underbrace{0.5}_{x_1}\right) = C_1 \cdot 0.5 = \underbrace{4.25}_{y_1}$$

נקבל ש$C_1 = 8.5$.

שלב 2 (k=2): הנקודה $(1,3)$

כרגיל, נשתמש בנוסחה:

$$p_2(x) = \underbrace{p_1(x)}_{=8.5\cdot x} + C_2(x-0)\cdot(x-0.5)$$

נציב את הנקודה הנתונה:

$$3 = 8.5\cdot 1 + C_2\cdot 1\cdot 0.5 = 8.5 + \frac{C_2}{2}$$
$$\Longrightarrow C_2 = -11$$

לכן הפולינום שנוצר הוא:

$$p_2(x) = 8.5\cdot x - 11\cdot x\cdot(x - \frac{1}{2})$$

שלב 3 (k=3): הנקודה (2,2)

$$p_3(x) = p_2(x) + C_3 \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)$$

נציב את הנקודה הנתונה:

$$2 = \underbrace{-16}_{p_2(2)} + C_3 \cdot 2 \cdot 1.5 \cdot 1 = -16 + 3C_3$$
$$\Longrightarrow C_3 = 6$$

סיימנו לעבור על כל הנקודות, לכן הפולינום הסופי הוא p_3:

$$p(x) = p_3(x) = p_2(x) + 6 \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) = \cdots = 6x^3 - 20x^2 + 17x$$

תשובה סופית:

$$\boxed{p(x) = 6x^3 - 20x^2 + 17x}$$

כך מבצעים אינטרפולציה בשיטת ניוטון.

יתרונות:

קל מאוד להוסיף נקודות [פשוט ממשיכים בתהליך 'תיקון' הפולינום עבור הנקודות החדשות]

חסרונות:

הייצוג הוא ע"י מטריצה משולשית תחתונה שקשה יותר לחשב את ההופכית שלה.

הערה חשובה:

ניתן להגדיר את שיטת ניוטון בצורה קצת שונה (לדעתי ההגדרה הקודמת יותר נוחה) כך: (שימו לב שההגדרות זהות לגמרי, דרך הכתיבה שונה)

עבור $n+1$ נקודות:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

בשלב הk פשוט נציב במקום n את $k-1$ (ה-1 הוא בגלל שיש $n+1$ שלבים! ולא n)
הייחוד של דרך ההצגה הזו של ההגדרה הוא שניתן לפתור תרגילים באמצעות טבלה (או עץ).

עתה נדגים את השימוש של ההגדרה השנייה ונפתור תרגיל ע"י עץ (נקרא לפעמים טבלה).

דוגמה:

נמצא את הפולינום שעובר בנקודות $(-1,-5), (0,3), (2,13), (4,55)$ בעזרת ההגדרה השנייה של שיטת ניוטון.

x	y			
-1	$\boxed{-5}$			
		$\frac{3-(-5)}{0-(-1)} = \boxed{8}$		
0	3		$\frac{5-8}{2-(-1)} = \boxed{-1}$	
		$\frac{13-3}{2-0} = 5$		$\frac{4+1}{4+1} = \boxed{1}$
2	13		$\frac{21-5}{4-0} = 4$	
		$\frac{55-13}{4-2} = 21$		
4	55			

התוצאות המסומנות במלבן יהיו מקדמי הפולינום.

$$p_3(x) = \boxed{-5} + \boxed{8}\big(x-(-1)\big) + \boxed{(-1)} \cdot (x+1) \cdot (x-0) + \boxed{1} \cdot (x+1) \cdot (x-0) \cdot (x-2)$$
$$= \cdots = 3 + 5x - 2x^2 + x^3$$

משפט השארית

משפט: (משפט השארית)

תהא f פונקציה גזירה ברציפות (לפחות) $N+1$ פעמים, ותהי $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ קבוצת נקודות הדגימה.
אזי פולינום האינטרפולציה p_N המקיים $p_N(x_i) = f(x_i)$ מקרב את הפונקציה f עם השגיאה:

$$f(x) - p_N(x) = \left(\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\right) \cdot (x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_N)$$

כאשר $\xi \in int(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$ (הקטע הנפרש ע"י נקודות אלו).

החסם של השגיאה הוא:

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!} \cdot |(x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_N)|$$

כאשר:

$$M_{N+1} = \max_{\xi} |f^{(N+1)}(\xi)|$$