

# מבנים אלגבריים - תירגול 0

5 בנובמבר 2016

## הגדרות:

הגדרה: הזוג הסדור  $(G, *)$  תקרא חבורה אם  $G$  היא קבוצה,  $*$  פעולה בינארית על  $G$ :

1. סגירות -  $\forall a, b \in G : a * b \in G$

2. קיבוציות -  $\forall g_1, g_2, g_3 : (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$

3. איבר יחידה -  $\exists e \in G : \forall g \in G : g * e = e * g = g$

4. הופכי -  $\forall g \in G \exists h : gh = hg = e$

מונאיד הוא חבורה בלי תנאי ההפוכי.  
אגודה (חבורה למחצה) היא מונאיד ללא תנאי איבר יחידה  
הגדרה: תהא  $(G, *)$  מונאיד. ו  $g, h \in G$ . אם  $gh = e$  אז יקרא הפיך מימין ו  $h$  יקרא הפיך משמאלי.  
אם  $g$  הוא הפיך מימין ומשמאל הוא יקרא הפיך דו"צ (בחבורה כל האיברים הם הפיכים דו"צ). ההופכי לו יסומן  $g^{-1}$   
הגדרה: תהא  $(G, *)$  אגודה. אם קיים  $e \in G$  כך ש  $\forall g \in G : g * e = g$  הוא יקרא יחידה שמאלית. באותו אופן מגדירים יחידה ימנית ודו"צ.  
הערה: יחידה דו"צ היא יחידה. ההופכי דו"צ הוא יחיד.

## דוגמאות

1. מרחב וקטורי  $(V, +)$  הוא חבורה עם יחידה 0. ההופכי ל  $v$  הוא  $(-v)$

(א) מטריצות  $\mathbb{F}^{m \times n}$  עם חיבור

(ב) פולינומים  $(\mathbb{F}_n[x], \mathbb{F}[x])$  עם חיבור

(ג) עם חיבור מודולו 2  $\mathbb{Z}_2$

(ד)  $\mathbb{Z}_2^n$

2.  $(\mathbb{C}/\mathbb{R}/\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$  הן חבורות חיבוריות עם יחידה 0. ההופכי ל  $x$  הוא  $-x$

3.  $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*/\mathbb{Z}^*, \cdot)$  הן חבורות כפליות עם יחידה 1. ההופכי ל  $x$  הוא  $\frac{1}{x}$

4.  $(\mathbb{N}, \cdot)$  מונאיד כפלי עם יחידה 1.

5. מטריצות  $\mathbb{F}^{m \times n}$  עם חיבור הן חבורה חיבורית עם יחידה מטריצת האפס. ההופכי של  $A$  היא  $-A$

6. מטריצות הפיכות  $GL_n(\mathbb{F})$  עם כפל הן חבורה כפלית עם מטריצת היחידה. ההופכי של  $A$  הוא  $A^{-1}$

7. הקבוצה  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  עם פעולת חיבור מודול  $n$  היא חבורה חיבורית עם יחידה 0. ההופכי של  $m$  הוא  $n-m$   
 הערה: הקבוצה  $\{1, \dots, n-1\}$  עם פעולת כפל מודול  $n$  אינה בהכרח אגודה! למשל  $2 \cdot 2 = 0$  אבל  $\{1, 2, 3, 4\}$

8. המטריצות  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  עם כפל היא מונואיד כפלי עם יחידה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
 יחידה שמאלית נוספות הן  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ . אין עוד יחידות ימניות.

9. הפולינומים  $(\mathbb{R}[x], \cdot)$  הן מונואיד. אין הפיך לפולינום מדרגה גדולה מאפס

10. סדרות בינאריות עם מספר סופי של אחדים

$$X = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \#\{n \mid a_n = 1\} < \infty\}$$

עם פעולת and היא אגודה בלי יחידה ( אם היתה יחידה היא היתה צריכה להיות  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$  שלא שייכת ל  $X$  )

11. תמורות  $S_3 = \{f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \mid f \text{ bijection}\}$  היא חבורה עם יחידה פונקצית הזהות. ההופכי של  $f$  הוא  $f^{-1}$ . הצגות תמורות כמחזורים זרים ויצוג

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$