

תרגיל בית 6 במתמטיקה בדידה, מדמח קיץ תשעז

12 בספטמבר 2017

1. כמה סדרות (a_1, \dots, a_{10}) של מספרים שלמים (לאו דוקא אי שליליים) יש המקיימות:

$$1 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_{10}| \leq 1000 \quad (*)$$

2. הועד האקדמי של הפקולטה להנדסה פרסם תחרות מאמרים אקדמיים: יחולקו 5 פרסים כספיים (מניחים שבפקולטה יש לפחות 5 סטודנטים שיגישו מאמר) בסדר עולה, עם הפרש של לפחות 1000 ש"ח בין פרס לפרס, כאשר הפרס הראשון (עבור המאמר המוצלח ביותר) יהיה לכל היותר 20000 ש"ח, והאחרון (עבור המאמר החמישי במוצלחותו) יהיה לכל הפחות 1000 ש"ח. כמה אפשרויות יש לחלוקת הפרסים בין הסטודנטים?

3. א. המחלקה למדמח החליטה על חלוקה של 11 פרסים על מאמרים מצטיינים. ידוע שרק חמישה חוקרים זכו. הוכיחו שיש לפחות שלושה מאמרים זוכים השייכים לאותו חוקר.

ב. סבא מחלק m ש"ח ל- n נכדיו כדמי חנוכה (הסבא עשיר כלומר, $m > n$) במספרים שלמים. הוכיחו שכל נכד מקבל לפחות $\frac{m}{n}$ ש"ח.

4. מספר התלמידים בכיתה הוא 34. ציון של תלמיד הוא מספר טבעי בין אפס לבין מאה, כולל. מצאו כמה אפשרויות יש להעניק ציון לתלמידים כך שהציון הממוצע בכיתה יהיה 87. (רמז: מה צריך להיות סכום הציונים?)

5. n אנשים נכנסים למסעדה. לכל אחד מהם מעיל ועניבה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ועניבה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את עניבתו (ייתכן שמישהו יקבל את המעיל או העניבה, אך לא את שניהם)?

6. האם קיים גרף שדרגות קודקודיו הן: (אם כן - ציירו אותו, אם לא - הוכיחו שלא קיים!)

א. 3,3,3,3

ב. 3,3,3,3,3

ג. 1,1,2,3,4,5

7. יהי G גרף עם 6 קודקודים. הוכיחו שב- G או במשלים \overline{G} יש משולש (מעגל המורכב משלושה קודקודים).

8. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים גרף 3 רגולרי עם 100 קודקודים.

ב. אם G גרף רגולרי אז גם הגרף המשלים \overline{G} רגולרי.

ג. יהי G גרף, אזי: G קשיר או \overline{G} קשיר.