אינפי 3 תרגול 2

2 בנובמבר 2013

קבוצות פתוחות וסגורות ב־$\mathbb{R}^n$

קבוצה פתוחה:

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה פתוחה אם כל נקודה $a \in A$ היא פנימית, ז"א יש $r > 0$ כך ש־$B(a,r) \subseteq A$.

דוגמה 1: הוכח כי הקבוצה $A = \{(x,y) \mid y > 0\}$ קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

פתרון: תהא $a \in A$. ניקח $d(a,l) = \inf\limits_{x \in l}\{||x-a||\}$ ועבור כל $r < d$ שניקח, נקבל $B(a,r) \subseteq A$. מ.ש.ל

דוגמה 2: מצא דוגמה למשפחה של אינסוף קבוצות פתוחות ב$\mathbb{R}^n$, כך שחיתוכן לא קבוצה פתוחה.

פתרון: תהא $x \in \mathbb{R}^n$. נסתכל במשפחת הכדורים הפתוחים $\{B(x,\alpha) \mid a > 0\}$. זו משפחה אינסופית של קבוצות פתוחות. נוכיח כי $\bigcap\limits_{\alpha>0} B(x,\alpha) = \{x\}$. ברור כי $\{x\} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha>0} B(x,\alpha)$, כי כל כדור מכיל את מרכזו. בכיוון ההפוך יהא $y \in \bigcap\limits_{\alpha>0} B(x,\alpha)$ אזי לכל $\alpha > 0$: $y \in B(x,\alpha) \Rightarrow ||y-x|| < \alpha$ וזה קורה $\forall \alpha > 0$ רק אם $||y-x|| = 0 \Rightarrow y = x$.
לכן $\bigcap\limits_{\alpha>0} B(x,\alpha) = \{x\}$. זו לא קבוצה פתוחה וסיימנו.

קבוצה סגורה

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה סגורה $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A = A^c$ קבוצה פתוחה.

אפיון: קבוצה A סגורה $\Leftrightarrow$ היא מכילה את כל נקודות השפה שלה (ז"א $\partial A \subseteq A$).
נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת שפה של A אם לכל $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon)$ מכיל גם נקודות של A וגם נקודות של A^c.

בנוסף: $\bar{A} = A \cup \partial A$ (A–סגור) היא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A.
למשל ב$\mathbb{R}^n$, אם $A = (0,1)$ אזי $\bar{A} = [0,1]$.

אפיון נוסף של קבוצה סגורה: $F \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה $\Leftrightarrow$ הגבול של כל סידרה מתכנסת_של נקודות ב־F שייך ל־F. כלומר F סגורה $\Leftrightarrow$מכילה את כל הגבולות של סדרות מתכנסות בתוכה.

הוכחת הטענה: $(\Leftarrow)$: נניח כי F סגורה. תהי $\{x^k\} \in F$ סידרה של נקודות מ־F וניקח סידרה של נקודות מ־F המתכנסת ל־$x \in \mathbb{R}^n$. צ"ל $x \in F$. נניח בשלילה ש$x \notin F$, כלומר $x \in F^c$ אבל F^c פתוחה, כלומר x נקודה פנימית של F^c

כלומר קיים $\epsilon > 0$ כך ש־$B(x,\epsilon) \subseteq F^c$ אבל $x^k \to x$, לכן החל ממקום מסוים , $x^k \in B(x,\epsilon)$ וזאת סתירה כי לקחנו x^k סידרה בF.

$(\Rightarrow)$: נניח כי הגבול של כל סדרה מתכנסת מתוך F שייך ל־F ונראה ש־F סגורה. נניח בשלילה שF לא סגורה כלומר F^c לא פתוחה. ז"א, לא כל הנקודות של F^c הן פנימיות. ניקח $x_0 \in F^c$ <u>לא פנימית,</u> ז"א

לכל $\epsilon > 0$, $B(x^0,\epsilon)$ מכיל נקודות שלא ב־F^c, ז"א מתוך F $\Leftarrow$ $B(x^0,\epsilon) \cap F \neq \emptyset$. נבחר לכל $k > 1$: $r_k = \frac{1}{k}$ ולכן לכל $k > 1$ קיימת $x^k \in B(x^0, r_k) \cap F$ $\Leftarrow$ $||x^k - x^0|| < r_k \to 0$ וזו סתירה שכן $x^k \to x^0 \notin F$.

סדרות ב־$\mathbb{R}^n$ וגבולותיהן

הגדרה: תהא $\{a^k\}_{k\geq 1}$ סדרת נקודות ב־$\mathbb{R}^n$, ותהי $a \in \mathbb{R}^n$. נאמר כי $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = a$ ($\{a^k\}$ מתכנסת ל־a) $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} ||a^k - a|| = 0$. [לכל $\epsilon > 0$ יש N טבעי, כך שלכל $k \geq N$ מתקיים $||a^k - a|| < \epsilon$].

דוגמה: נגדיר $\{a^k\} \subseteq \mathbb{R}^3$ סידרה $a^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{2k+1}{k+1}, k\sin\frac{1}{k}\right)$. נוכיח כי: $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = (0,2,1)$

הוכחה: $|||a^k - a|| = \sqrt{(\frac{1}{k} - 0)^2 + \left(\frac{2k1}{k+1} - 2\right)^2 + \left(k\sin\frac{1}{k} - 1\right)^2} \to \sqrt{0+0+0} = 0$ ומש"ל.

טענה: התכנסות ב־$\mathbb{R}^n$ שקולה להתכנסות של כל רכיב של איברי הסדרה ב$\mathbb{R}$.

הערה: אפשר להגדיר סידרת קושי ב־$\mathbb{R}^n$ כסדרת קושי בנורמה: $\{a^k\}_{\subseteq \mathbb{R}^n}^{\text{Cauchy}}$ אם לכל $\epsilon > 0$ יש N טבעי כך שלכל $n,m > N$: $||a^m - a^n|| < \epsilon$.

דוגמה: נראה כי $a^k = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right)$ היא סדרת קושי ב$\mathbb{R}^2$.

תשובה: יהיו m,n טבעיים כלשהם ונחשב: $||a^m - a^n|| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{2} \cdot \left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right| < \sqrt{2}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}\right)$. יהי $\epsilon > 0$. נמצא N כך שלכל $n,m > N$ מתקיים: $||a^m - a^n|| < \epsilon$. כדי לקיים זאת, מספיק להבטיח $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}\right) < \epsilon$ ומספיק לדרוש $\sqrt{2}\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$ וגם $\sqrt{2}\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ $\Leftarrow$ $m > \log_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{\epsilon}\right)$. נבחר: $N = \max\left\{1, \left\lceil \log_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{\epsilon}\right)\right\rceil\right\}$ ונקיים את הנדרש. מש"ל.

טענה: סדרת נקודות ב־$\mathbb{R}^n$ מתכנסת $\Leftrightarrow$היא סידרת קושי ב־$\mathbb{R}^n$.